高等学校教学用書

振动理論引論

下册

C. П. 斯特列可夫著

高等教育出版社

本書系根据苏联技术理論書籍出版社（Гостехиздат）出版的斯特列可夫（С.П. Стрелков）著“振动理論引論”（Введение в теорию колебаний）1951年版譯出，原書經苏联高等教育部审定作为高等学校的教科書。

中譯本暫分为二册出版，本册为下册，內容講解具有多个自由度的綫性系統中的振动，以及其在科学技术上的应用。

本書由何文蛟、王君健兩同志合譯，由何文蛟同志校訂。

振动理論引論

下册

С.П.斯特列可夫著

何文蛟 王君健譯

高等教育出版社出版 北京琉璃廠170号

（北京市書刊出版業營業許可証出字第054号）

京华印書局印刷 新华書店总經售

統一書号 13010·416 開本 850×1168 1/32 印張 4 8/16 字數 111,000 印數 0001—3,500

1958年3月第1版 1958年3月北京第1次印刷 定價（8）¥0.55

下 册 目 录

第二编　具多个自由度的綫性系統中的振动

第一章　具兩个自由度的系統中的振动 ……223

§ 53.　关于确定自由度数的概述 ……223

§ 54.　具兩个自由度的系統的例子 ……225

§ 55.　部分系統与全系統 ……226

§ 56.　在無阻尼的兩个电感耦合迴路的系統中的固有振动 ……229

§ 57.　系統的固有頻率与迴路間失諧（比值$\frac{n_2}{n_1}$）的依存关系 ……234

§ 58.　在具兩个自由度的無摩擦系統中(一般情形)的固有振动的理論 ……236

§ 59.　彈性耦合擺的固有振动 ……241

§ 60.　正則坐标 ……243

§ 61.　固有頻率是最小值 ……247

§ 62.　兩个系統的耦合与耦合度(兩个系統的相互作用) ……249

§ 63.　在大耦合度情況下的振动 ……251

§ 64.　具兩个自由度的系統在有摩擦时的固有振动 ……255

§ 65.　具小阻尼的电感耦合迴路中的固有振动 ……259

§ 66.　諧外力对具兩个自由度的無阻尼的系統的作用 ……261

§ 67.　具兩个自由度的系統当有阻尼时的受迫振动 ……267

§ 68.　系統的复数参数 ……273

§ 69.　关于系統的共振頻率的概述 ……275

§ 70.　超外差中的中頻濾波器的計算 ……278

第二章　具多个自由度的綫性系統中的振动 ……281

§ 71.　具多个自由度的綫性振动系統的一般性質 ……281

§ 72.　無摩擦力的系統中的固有振动 ……284

§ 73.　附有三个小珠的弦的固有振动 ……289

§ 74.　正則坐标 ……293

§ 75.　正則坐标的正交性 ……294

§ 76　固有振动的能量和正則振动的能量 ……297

§ 77.　正則坐标标尺的变化 ……299

§ 78.　附有小珠的弦的正則坐标 ……301

§ 79.　系統的固有頻率相等的情形 ……303

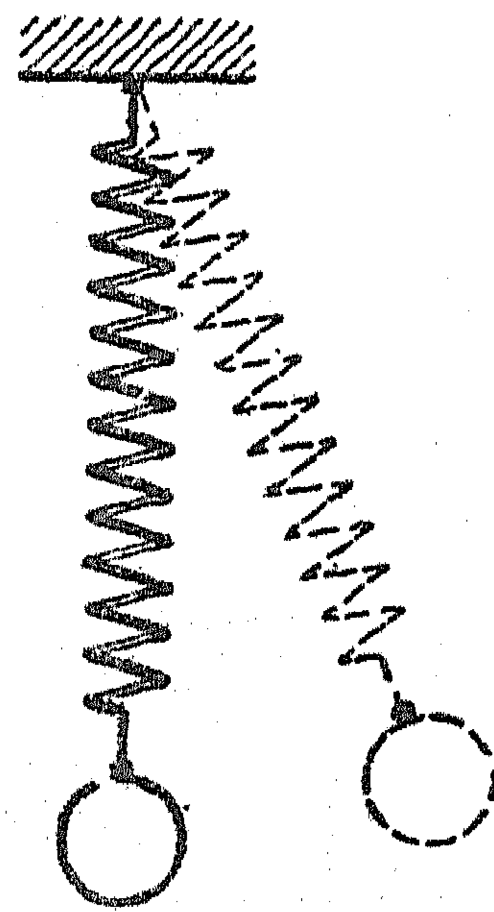
§ 80. 一个或是几个固有頻率等于零 ……304
§ 81. 具多个自由度的系統在有阻尼的情况下的振动 ……306
§ 82. 在無阻尼系統中的受迫振动 ……308
§ 83. 具多个自由度的系統在有摩擦情况下的受迫振动 ……313
§ 84. 同样环节(元件)的"鏈" ……316
§ 85. 均匀元件的鏈中的固有振动 ……318
§ 86. 均匀元件的鏈(濾波器)中的受迫振动 ……325
第三章 具分布参数的振动系統 ……335
§ 87. 具分布参数的均匀系統 ……335
§ 88. 無阻尼的均匀分布系統的固有振动 ……341
§ 89. 在非齐次边界条件下的固有振动的例子 ……350
§ 90. 固有振动波形的正交性 ……351
§ 91. 具阻尼系統的固有振动 ……353
§ 92. 具分布常数的均匀系統中的受迫振动 ……355
考参文献 ……362

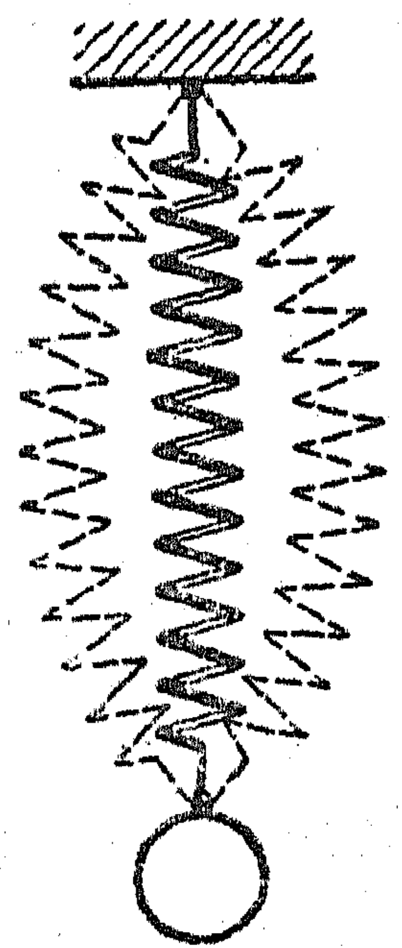
第二編　具多个自由度的綫性系統中的振动

第一章　具兩个自由度的系統中的振动

§53. 关于确定自由度数的概述

在确定振动系統自由度数的时候，应該注意一些附帶的条件。这些条件，我們在§1中分析具一个自由度的系統时，便早已提到过。就具一个自由度的振动系統的普通例子（在彈簧上的質量）而言，假如注意到質量在鉛直平面中的擺式振动时，便可以把它当作是具兩个自由度的系統（圖159）；其次，假如質量还会在与前一鉛直平面垂直的另一鉛直平面中振动，那末，悬在彈簧上質量的振动，便可以当作是具有三个自由度的振动；再，假如給出这样的起始条件：彈簧的各个小环都产生振动，例如具有如圖160所示的那种形式，那末，这种在彈簧上質量的振动便应該当作是具有無穷个自由度数系統中的振动。


圖 159.


圖 160.

前面曾經指出过，为了分析在彈簧上質量的振动，必須以一定的方式給出起始条件。將質量沿鉛直方向拉开，幷沿这一方向給質量以冲击时，那末，这时質量所作的振动，可以当作是具一个自由度系統中的振动。

假如質量的起始位移和速度，是在同一鉛直平面內，那末，振

动便类似于具兩个自由度系統中的振动，余类推。

然而，这样的說法并不总是正确的。例如，假如当彈簧上的質量作摆式振动的頻率，接近于同一質量作鉛直振动的固有頻率时，或者当鉛直振动的頻率比摆式振动的頻率大一倍时，在激發鉛直振动时，会产生摆式振动，在激發摆式振动时，也会产生鉛直振动。在这里会發生复杂的运动，然而关于这种复杂振动的基本情况是可以想像的。將質量沿鉛直的方向向下拉，然后放开，我們便激發起摆的鉛直振动，但这时由于我們所給的冲击，或者由于其他偶然的冲击，会产生不大的摆式振动。在这种狀态下的系統，將大致接近于具有交变長度的摆。摆的長度以这样的頻率变化，以致可能产生参数共振。于是，摆式振动开始增長起来，当然，这种增長是靠减小鉛直振动的能量而得来的。因此，假如摆式振动的固有頻率不接近于鉛直振动的固有頻率（或者不接近于鉛直振动的固有頻率的一半），在一定的起始条件下，可以把悬在彈簧上質量的振动看作是具有一个自由度的运动。在这种情况下，質量的运动和鉛直运动很相近，“不明显的”摆式振动不会使系統的运动發生原则性的变化。

在这一編里，我們將闡明，一个系統有多少个自由度，它便有多少个固有頻率。因此，一般仅仅在这种情况下，即当某些自由度所关联的頻率，和系統在一定的起始条件下作振动的頻率相差很大时，才能忽略这些自由度。例如，假如有一个如圖 160 所示形狀的摆，其彈簧的振动頻率，比彈簧上質量的鉛直振动的頻率高得多，那末，由于某种偶然的冲击，虽然也产生頻率十分高的彈簧的側振动，但当有由鉛直的起始冲击所引起的鉛直振动时，側振动很不易察覺。因而我們可以把这彈簧看作是“沒有慣性的”，并且不去留意彈簧在鉛直振动时各小环所發生的微小顫动。这样一来，一个复杂系統中的振动，是否可以近似地当作比較簡單系統中的振

动，那就要看与所忽略坐标相关联的頻率的相对大小如何来决定。

§54. 具兩个自由度的系統的例子

1）双物理摆（圖 161）。物体 A 可以繞水平軸 O 作小振动，物体 B 也可以繞軸 O' 作小振动，軸 O' 与軸 O 平行，并牢固地与物体 A 結合着。

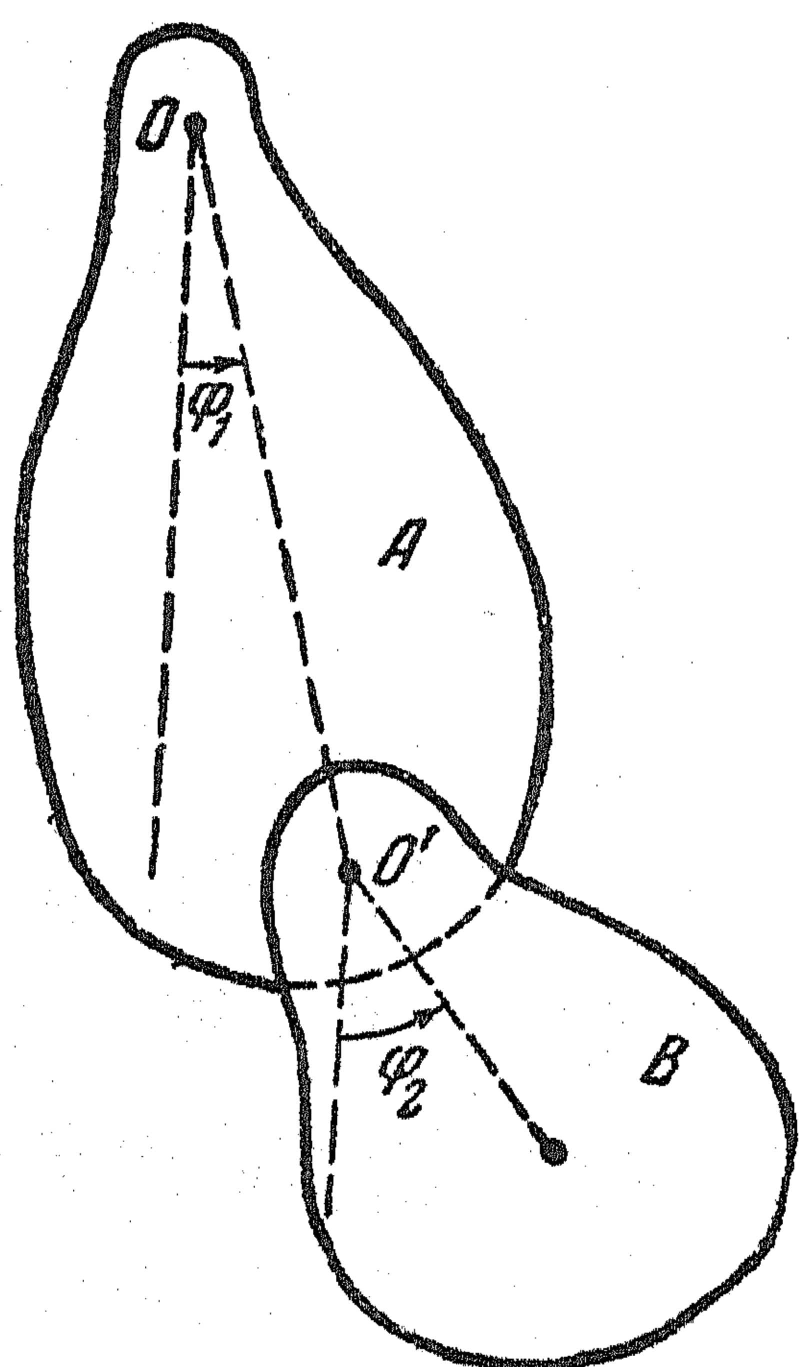


圖 161.

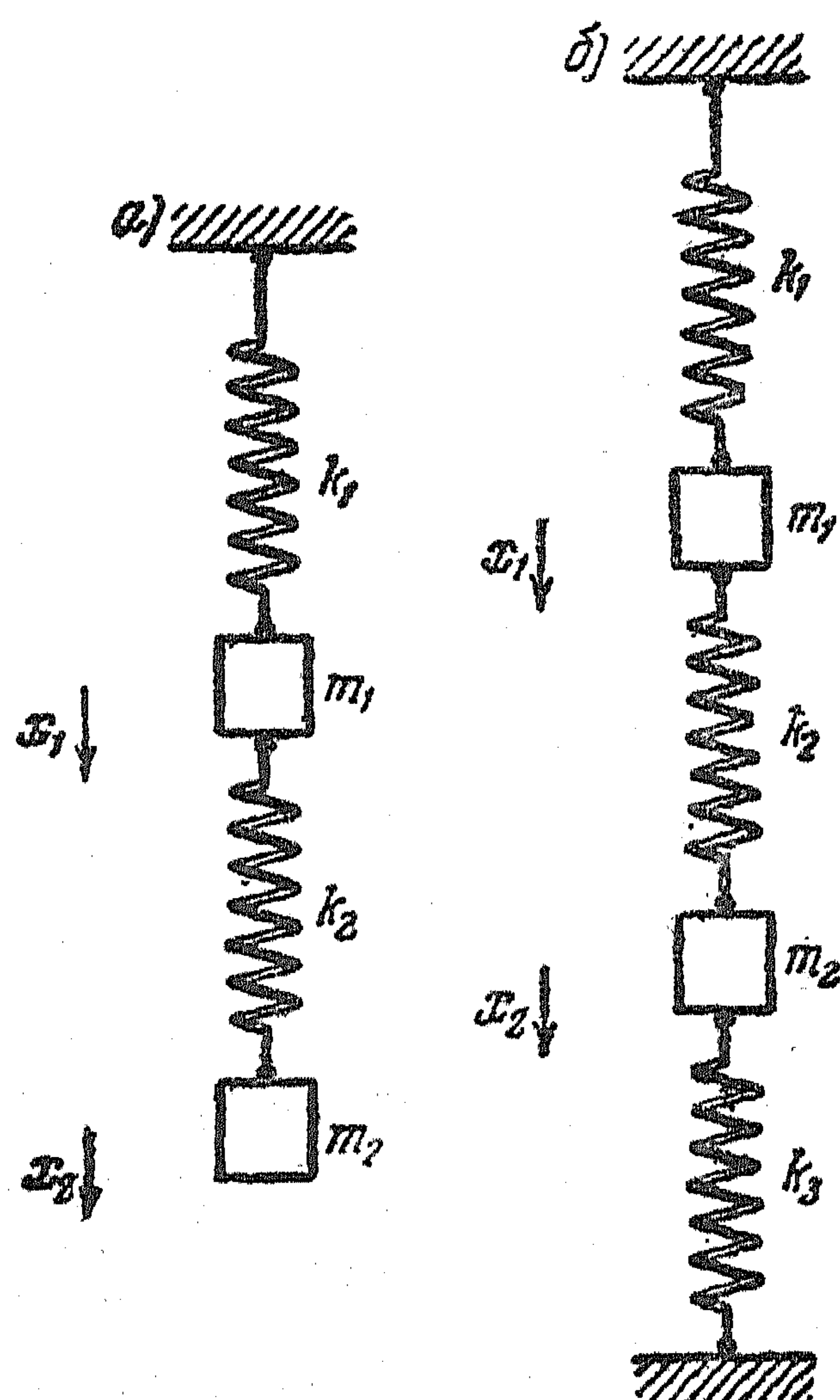


圖 162.

假如軸 O 与軸 O' 間的距离，由軸到这些物体質心的距离，以及这些物体对平行于旋轉軸的某一軸的轉动慣量为已知时，那末，关于振动方面的問題，便可以作出解答。

2）兩个悬在彈簧上的質量（圖 162）。这里所指的是 m_1 和 m_2 兩个質量的鉛直振动。圖 162, б 所示的例子，在原理上与圖 162, a 沒有什么区别。

3）悬在兩个彈簧上的梁的振动（圖 163）。在这种情形下，問題是关于梁在鉛直平面中所作的小振动，这梁是悬在具有剛度系数 k_1 和 k_2 的兩个彈簧上，假如已知梁的質心的位置，已知梁的質

量的大小以及对于水平軸的轉动慣量，那末，关于振动方面的問題，便可以得出解答。

4）由兩个耦合的电迴路所組成的系統中的振动。

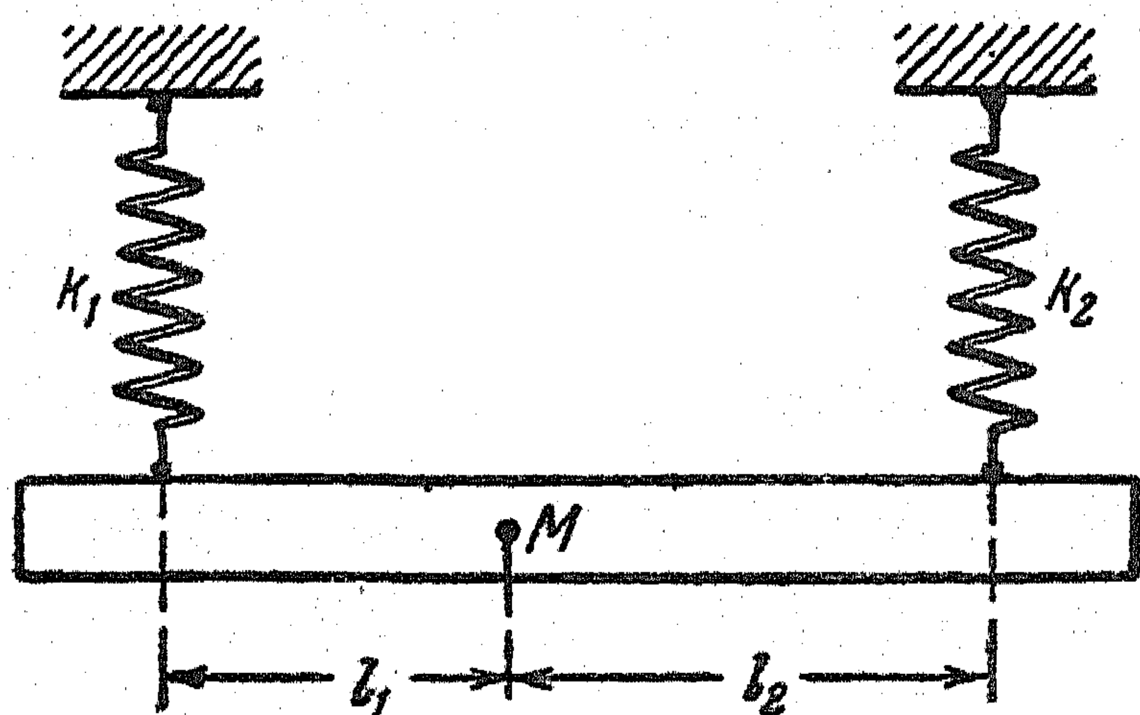


圖 163.

圖 164, *а*, *б*, *в*, *г*, *д* 是这种系統的一些例子。兩个迴路間的电振动的耦合，可以用很多不同的方法来实現。例如，圖164, *а* 表出了电感耦合，圖164, *б* 表出了电容耦合，圖164, *в* 表出了混合耦合，圖164, *г* 表出的也是电容耦合，但这一系統与圖 164, *б* 所示的系統是有区别的。圖 164, *д* 表出了电流耦合的例子，这一耦合是用在公共电路中的欧姆律电阻 r 来实現的。

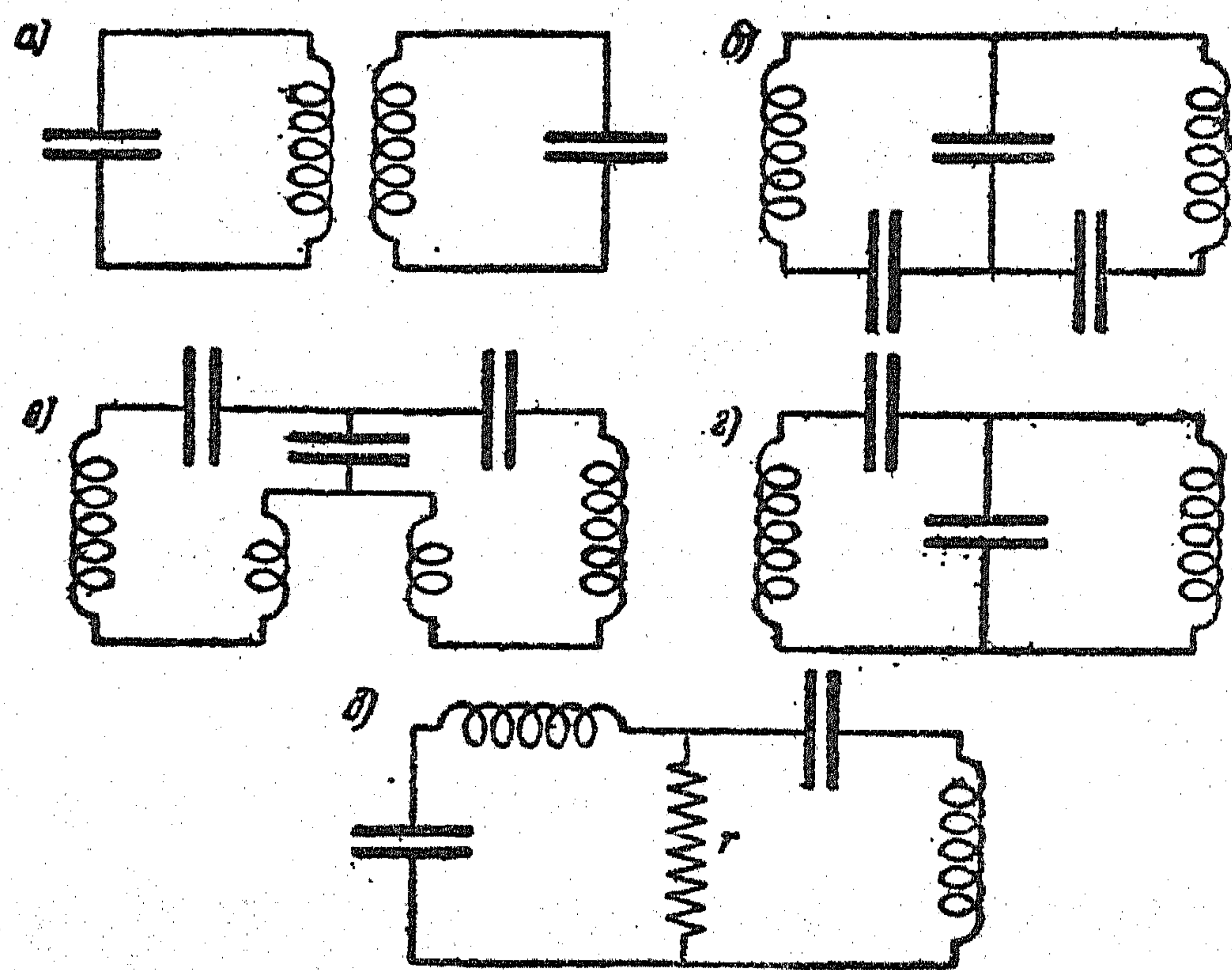


圖 164.

§ 55. 部分系統与全系統

由前一节所講的例子中可以看出，一个复杂的系統，可以当作是由兩个各具一个自由度的系統互相耦合所組成，在这里“耦合”兩字的意义是：系統甲中的振动会影响另一个系統乙中的振动，反过来，乙中的振动也会影响甲中的振动。

要分析复杂系統中的物理現象，必須把各个系統中的振动特

性弄清楚，組成复杂的全系統的各个系統称为部分系統。首先要知道：复杂系統是由哪些部分系統，哪些具一个自由度的系統所組成的；耦合，亦即部分系統的振动之間的相互作用，是怎样实現的，部分系統的特性和它們之間的耦合又是怎样决定着全系統中的过程。所有这些，对于要弄清兩个系統間相互作用的情况，都是必需的。現在来闡明，兩个迴路間的相互作用由什么来决定，它依存于什么，以及在实际中，什么时候可以把它忽略，从而可以把每个部分系統中的振动当作是独立的振动。通常这样回答这些問題：当耦合小时，那末便可以把每个系統当作是單独的系統。一般說来，这是正确的。但与什么相比，耦合应該显得小呢？怎样的耦合才算足够大呢？以及当耦合是怎样的值时，就必須分析在复杂系統中的振动呢？——要解答所有这些問題，只有在这种基础上，即分析了复杂全系統的各个部分系統，并弄清了各部分系統之間的互相作用的規律以后，才有可能。

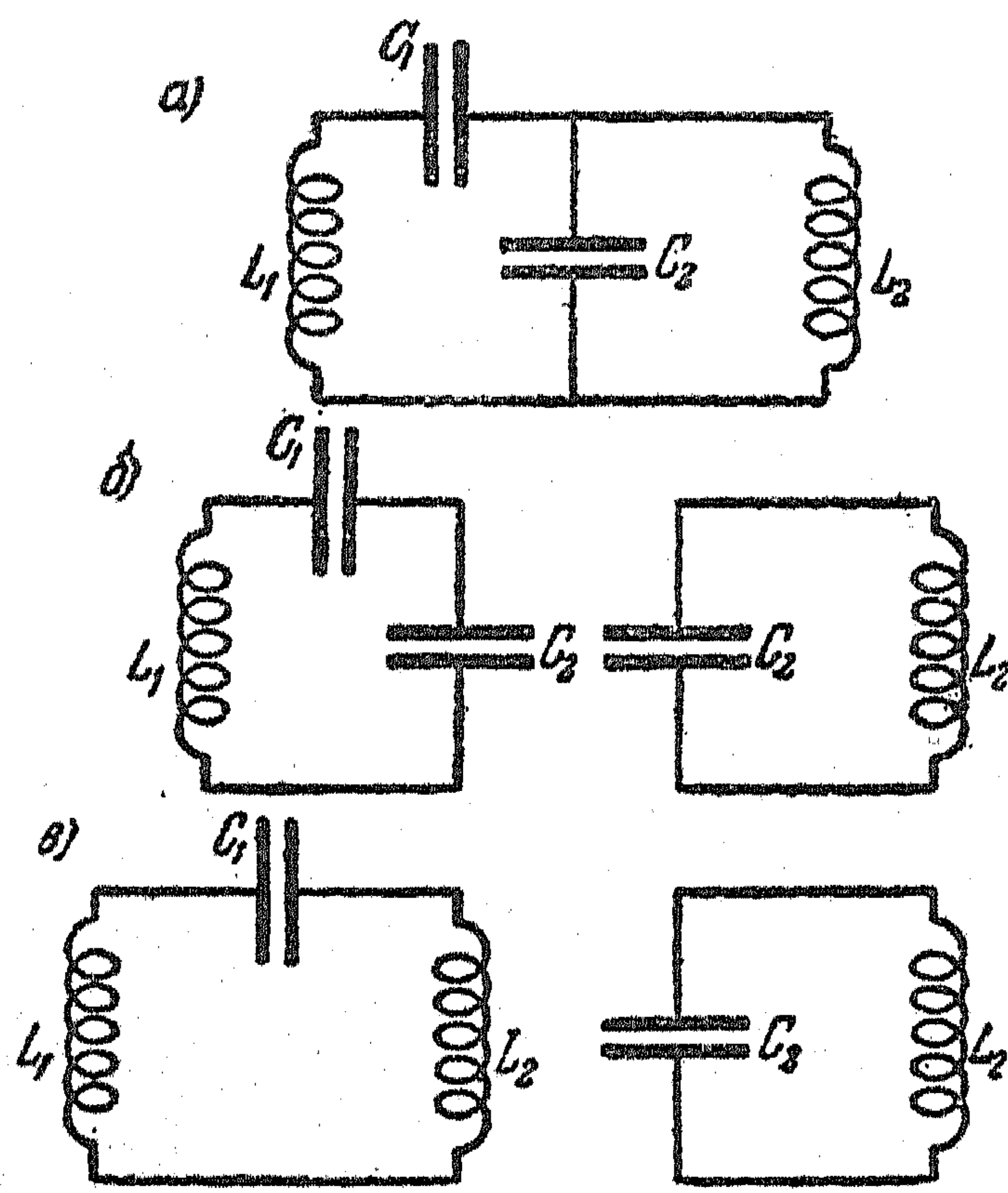


圖 165.

一个全系統是由哪些个别系統或者部分系統所組成，在一般情况下，并不总是能够唯一地确定的。例如在圖 164, *а* 所示的系統的情形中，全系統由哪些迴路組成看得很清楚，而在圖 164, *г* 以及其他各圖的情形中，却不很明显。其实，圖 165, *а* 所示的系統，可以当作是由圖 165, *б* 所示的迴路所組成。也可以当作如圖165, *в* 所示的迴路所組成。

今后將按照下列准則，將独立坐标跟部分系統联系起来：与某个坐标相对应的部分系統就是这样一种系統，即除該坐标外，令全

系統中所有其余的坐标恒等于零，这时由全系統得到的部分系統，便是与該坐标对应的部分系統，因为今后总是將每个在平衡位置的坐标选擇为零，那末，坐标恒等于零無异于“剛性的固定”，無异于沒有沿該坐标运动的可能性。例如，圖 166 所示的系統，有兩个坐标 x_1 和 x_2，这兩个坐标对应于彈簧由平衡位置的形变，因此，它包含兩个部分系統：1)对应于梁在鉛直平面內圍繞着彈簧 x_2 的支点的旋轉，部分振动在具有坐标 x_1 的彈簧上进行（圖 166, a），2)对应于梁圍繞着彈簧 x_1 的支点的旋轉(圖 166, $б$)。

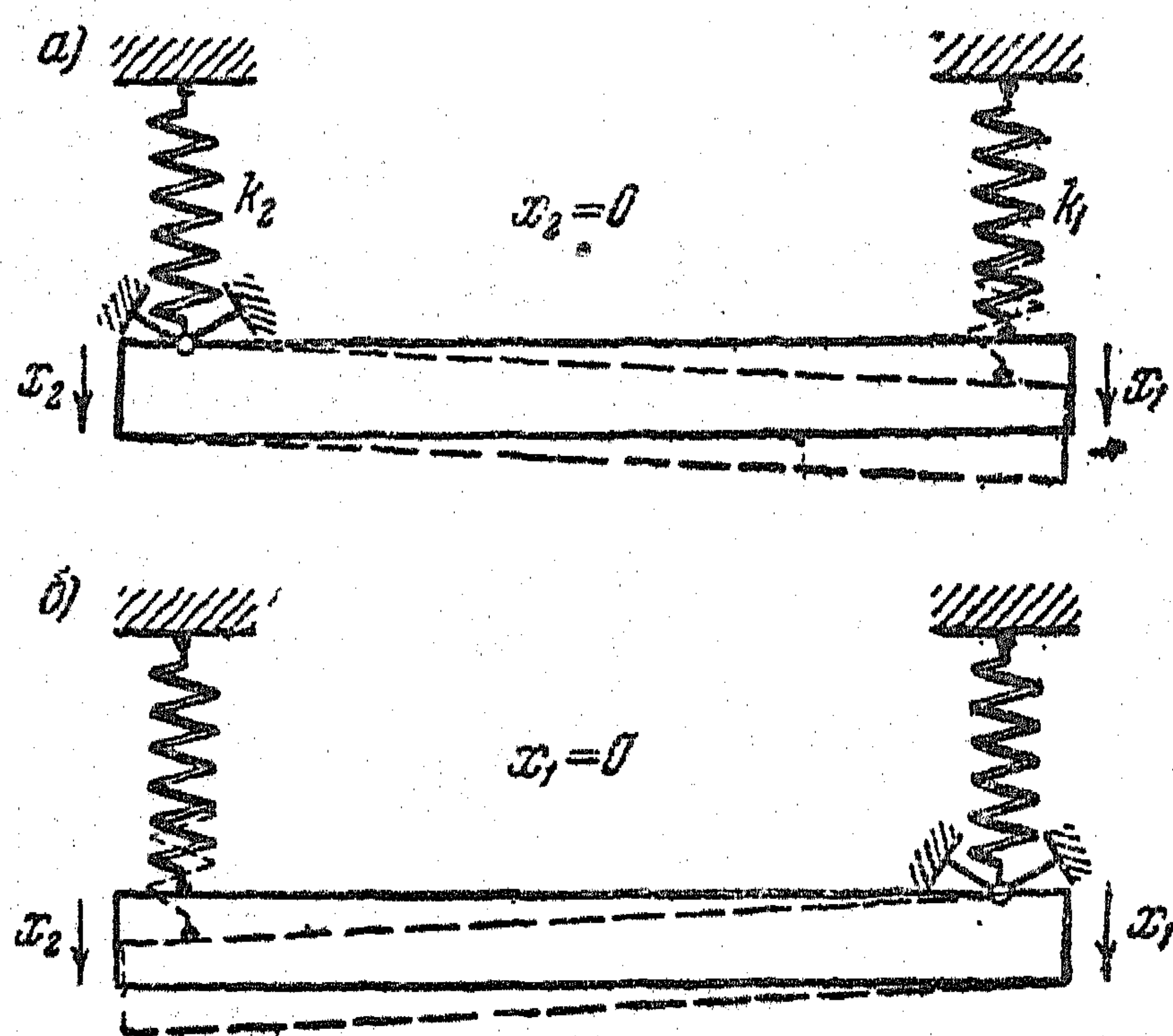


圖 166.

和具一个自由度的系統一样，每个部分系統有一定的固有頻率，我們以后用 n_1 和 n_2 来代表部分頻率。

在电路中，如果我們把某个元件中的电流取作独立坐标，令該坐标恒等于零，这相当于在电路中把这个元件“断开”。例如在圖167 所示的系統中，取电流 I_1 和 I_2 当作独立坐标，那末，全系統便是由兩个部分系統(圖 168, a 和 168, $б$)組成的。

由这些例子可以看出，随着独立坐标选擇得不同，可以用不同的方法將全系統分解为一些部分系統。例如，对于在彈簧上梁的振动(圖 163 和圖 166)而言，我們就可以选擇另外的坐标，即設 ξ 是梁的質心在鉛直方向的歧离，又設 ψ 是梁圍繞通过質心的水平軸旋轉的角度。于是，和圖 166 所示的部分系統比起来，这种部分系統將完全是另一种情况，一个部分系統对应于梁在鉛直平面內平移，另一个部分系統对应于梁圍繞通过質心的軸轉动。就电路

而言，也正是一样，例如在圖 167 所示的迴路中，可以把流过綫圈的电流取作坐标，这时，部分系統將又是一样。在圖 169 上表出了与这种部分系統相对应的迴路。

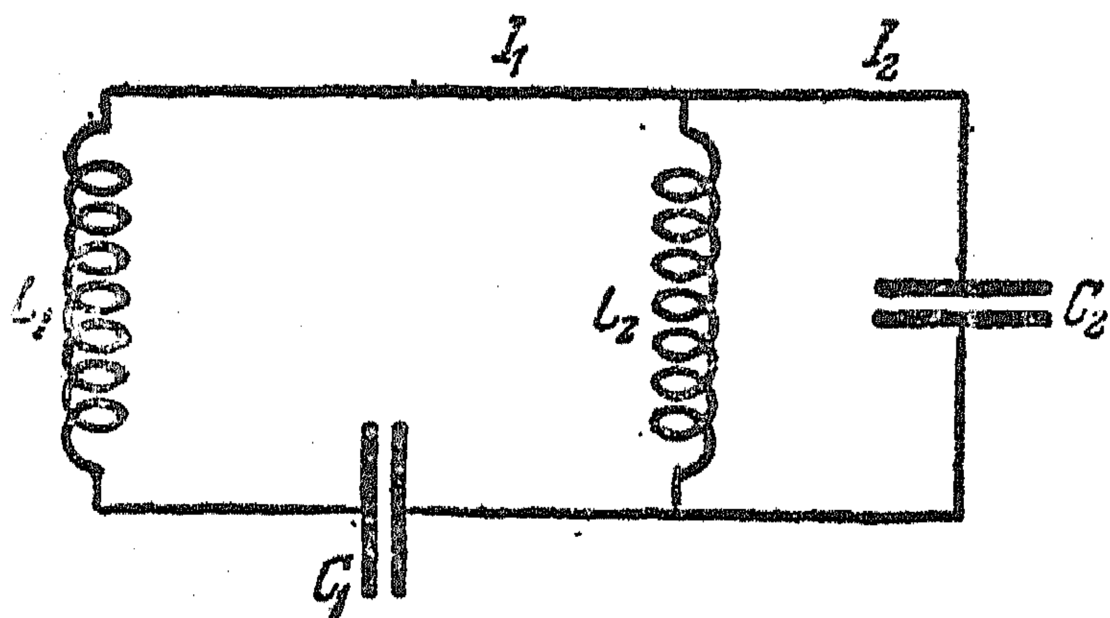


圖 167.

一般說来，在一个全系統中，可以用各种不同的方法选擇独立坐标，因此，要將全系統分解为部分系統，也就有各式各样的方法。在一定的起始条件下，基本系統中的运动总是相同的。但是，当坐标取得不同时，运动的形式却又是一样。

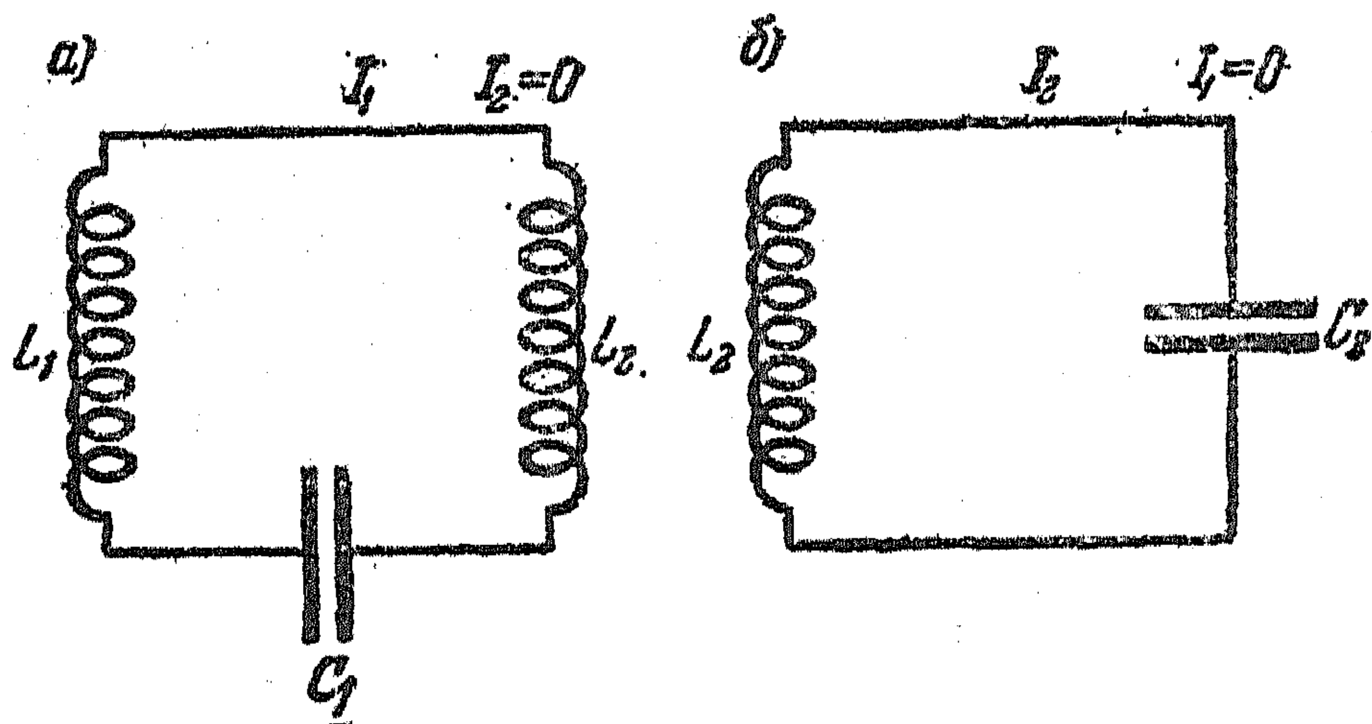


圖 168.

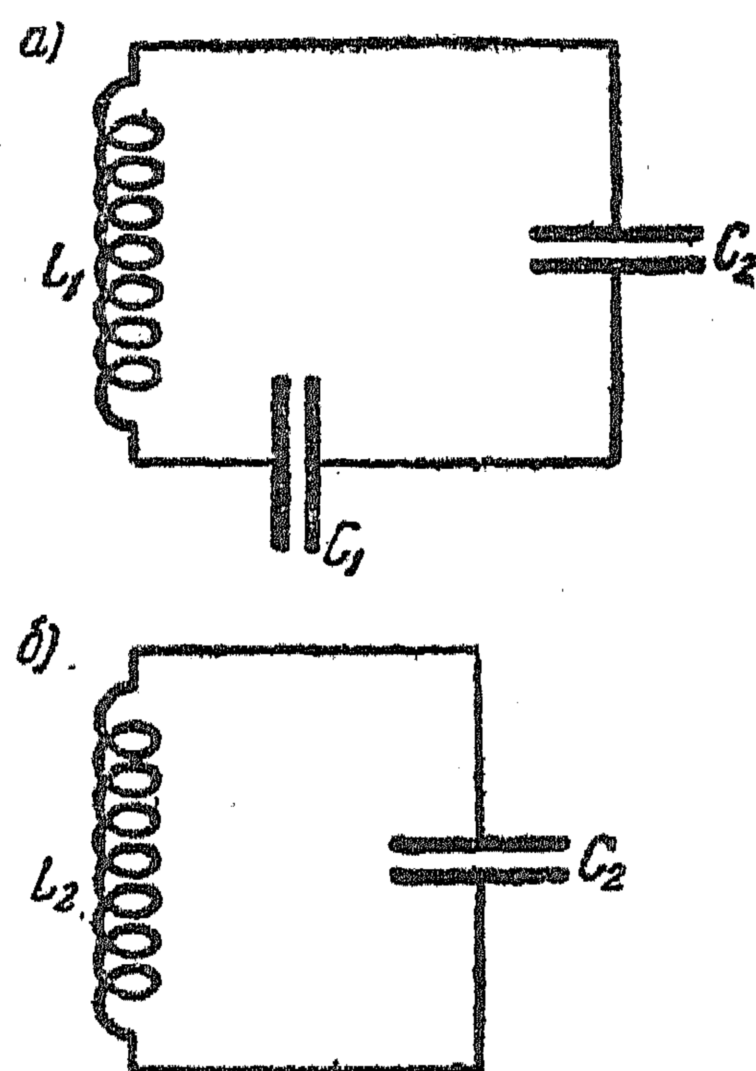


圖 169.

§ 56. 在無阻尼的兩个电感耦合迴路的系統中的固有振动

現在来研究在兩个电感耦合的迴路中的电振动，这迴路的参数如圖 170 所示。如果把迴路中的电流 I_1 和 I_2 选作独立坐标，那末，每个迴路的电压的方程式可以写作：

$$\begin{aligned} L_1\dot{I}_1+\frac{1}{C_1}\int I_1dt+M\dot{I}_2=0, \\ L_2\dot{I}_2+\frac{1}{C_2}\int I_2dt+M\dot{I}_1=0. \end{aligned} \qquad (56.1)$$

迴路的部分頻率为:

$$n_1^2=\frac{1}{L_1C_1},\quad n_2^2=\frac{1}{L_2C_2}. \tag{56.2}$$

对(56.1)进行微分,幷將(56.2)代入,我們便得到确定电流的下列微分方程組:

$$\begin{aligned}\ddot{I}_1+n_1^2I_1+\frac{M}{L_1}\ddot{I}_2=0,\\ \ddot{I}_2+n_2^2I_2+\frac{M}{L_2}\ddot{I}_1=0.\end{aligned} \tag{56.3}$$

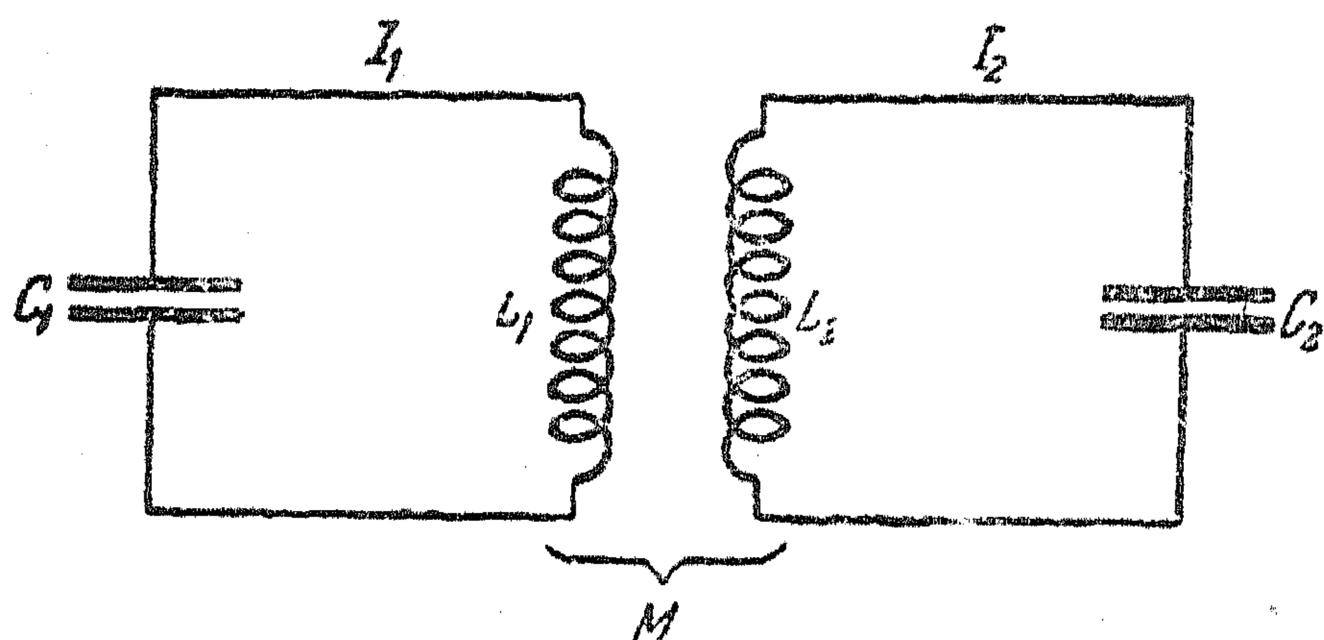


圖 170.

假設方程組(56.3)組有下列的特解:

$$\begin{aligned}I_1=A\cos(\omega t+\varphi),\\ I_2=B\cos(\omega t+\varphi),\end{aligned} \tag{56.4}$$

其中 A, B, φ 和 ω 都是常量。將(56.4)代入(56.3)中,便得到确定未知量的兩个普通方程式:

$$\begin{aligned}(n_1^2-\omega^2)A-\frac{M}{L_1}\omega^2B=0,\\ -\frac{M}{L_2}\omega^2A+(n_2^2-\omega^2)B=0.\end{aligned} \tag{56.5}$$

在方程式(56.5)中,只包含着 A, B, 和 ω 三个量。因此,在(56.4)中的相位 φ 暂时可以是任意的。方程式(56.5)是关于振幅 A 和 B 的兩个齐次方程式的組。因此,由(56.5)只能求出兩个振幅間的比値。仅仅在方程組(56.5)的行列式等于零的条件下,即下式成立时,

$$\begin{vmatrix} n_1^2-\omega^2 & -\frac{M}{L_1}\omega^2 \\ -\frac{M}{L_2}\omega^2 & n_2^2-\omega^2 \end{vmatrix}=(n_1^2-\omega^2)(n_2^2-\omega^2)-\frac{M^2}{L_1L_2}\omega^4=0.$$

A 和 B 才有一定的値。上式是一个方程式，并可由它来确定振动頻率 ω。引用表示符号 $\chi=\frac{M^2}{L_1L_2}$，χ 这个量称为兩迴路間的耦合系数，那末，关于頻率的方程式可以改写为：

$$(1-\chi^2)\omega^4-(n_1^2+n_2^2)\omega^2+n_1^2n_2^2=0. \tag{56.6}$$

四次方程式(56.6)的解，提供了系統可能發生的諧振动的兩个頻率的値——ω_1 和 ω_2：

$$\omega_{1,2}^2=\frac{1}{2(1-\chi^2)}\left[n_1^2+n_2^2\pm\sqrt{(n_1^2+n_2^2)^2-4(1-\chi^2)\,n_1^2n_2^2}\right]. \tag{56.7}$$

因此，在系統中可能有具有頻率 ω_1 或 ω_2 的諧振动，頻率 ω_1 和 ω_2 与系統的部分頻率 n_1 和 n_2 是有差別的，仅仅当

$$\chi\to 0$$

时，ω_1 和 ω_2 才趋近于 n_1 和 n_2。由(56.7)求出了 ω_1 并將它代入方程組(56.5)以后，我們便得到对应于頻率 ω_1 的 A_1 和 B_1 的比値。在这种情况下，方程式(56.5)可以写为：

$$(n_1^2-\omega_1^2)A_1-\frac{M}{L_1}\omega_1^2B_1=0,$$

$$\frac{M}{L_2}\omega_1^2A_1-(n_2^2-\omega_1^2)B_1=0.$$

由这里得

$$\frac{B_1}{A_1}=\frac{n_1^2-\omega_1^2}{\frac{M}{L_1}\omega_1^2}=\frac{\frac{M}{L_2}\omega_1^2}{n_2^2-\omega_1^2}=k_1, \tag{56.8}$$

其中 k_1 是关于頻率 ω_1 的兩个振幅的比値，也就是由系統参数所决定的常数。因此，在一个迴路中，頻率 ω_1 的振动振幅可以是任意的値，可是在另一迴路中，这同一頻率的振动振幅和第一个迴路中的振幅之間，总要保持(56.8)的一定比値。k_1 这个量称为关于兩个坐标的頻率为 ω_1 的振幅分布系数。

对頻率 ω_2 的振动而言，也完全一样，我們可以求出另一个振

幅比值 k_2，它等于

$$k_2=\frac{B_2}{A_2}=\frac{n_1^2-\omega_2^2}{\frac{M}{L_1}\omega_2^2}=\frac{\frac{M}{L_2}\omega_2^2}{n_2^2-\omega_2^2}. \tag{56.9}$$

方程式(56.3)的通解，或者迴路系統中电流的振动，在一般的情形下，具有下列形式:

$$\begin{aligned} I_1&=A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2),\\ I_2&=A_1k_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+A_2k_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2), \end{aligned} \tag{56.10}$$

其中 $A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2$ 是决定于起始条件的任意常数。

每个迴路中的振动都含有頻率为 ω_1 和 ω_2 的兩个諧振动。并且在兩个迴路中，同一頻率的振动具有相同的相位。同一頻率的振动振幅的比值(分布系数)依存于系統的構造，而与起始条件無关。

頻率 ω_1 和 ω_2 称为兩迴路系統的固有頻率。关于系統中的振动［公式(56.10)］可以这样来描述：振动包含着頻率为 ω_1 和 ω_2 的兩个固有諧振动，而每个振动是同时在兩个迴路中發生的。如果兩迴路間的耦合不等于零，那末，k_1 和 k_2 就不会为零［参考(56.9)，(56.8)和(56.7)］，因此，在兩个迴路中，一般每个固有頻率的振动都会有。而無法在耦合迴路中选擇这样的起始条件，使得在一个迴路中的頻率为 ω_1，而在另一迴路中的頻率为 ω_2。因此，一般說来，每个迴路中的振动都是非諧的。如果頻率 ω_1 和 ω_2 彼此很相近，那么，振动便帶有拍的特性，这就是說，振动与諧振动相似，在这种諧振动中，振幅作周期性的变化，时而增加，时而减小。

然而，也不难选擇这样的起始条件，使得在兩个迴路中产生同一頻率(ω_1 或者 ω_2)的振动，也就是产生諧振动。

例如，假如在起始瞬間，当 $t=0$ 时，$I_1=a$, $I_2=k_1a$, $\dot{I}_1=0$, $\dot{I}_2=0$，那末，將这些代入(56.10)中，我們便得到下列方程式:

$$a = A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2,$$

$$k_1 a = A_1 k_1 \cos \varphi_1 + A_2 k_2 \cos \varphi_2,$$

$$0 = \omega_1 A_1 \sin \varphi_1 + \omega_2 A_2 \sin \varphi_2,$$

$$0 = \omega_1 k_1 A_1 \sin \varphi_1 + \omega_2 k_2 A_2 \sin \varphi_2.$$

假如 $\omega_1 \neq \omega_2$, $k_1 \neq k_2$, 那末，由后兩个方程式可得: $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, 从而由前兩个方程得:

$$a = A_1 + A_2,$$

$$k_1 a = A_1 k_1 + A_2 k_2.$$

由上式知: $A_2 = 0$, $A_1 = a$。因此，在迴路中的振动將具有下列形式:

$$I_1 = a \cos \omega_1 t, \quad I_2 = a k_1 \cos \omega_1 t.$$

要注意到，我們有时可以利用这一情况，由实驗来确定固有頻率。假如由于某种理由，譬如，在兩个同样的耦合迴路中，由于对称的理由，可以指出这样一种起始条件，在具备这种条件时，迴路中的振动应該是諧振动，那末，这种振动的頻率是固有頻率。

將这一准則应用于下述机械系統时，特別清楚。例如，有兩个同样的摆，由彈簧耦合起来(圖 171)，幷設摆的振动是發生在彈簧的平面内的。显然，当令兩个摆向同一边作同样的起始歧离时，每个摆都將作諧振动。这种振动的頻率是系統的一个固有頻率，例如 ω_1。如果兩个摆在起始瞬間，分別向左右兩边偏离一个同样的角度时，那末，振动还是諧振动，不过这种振动的頻率是另一个固有頻率 ω_2。不难理解，由于彈簧長度的振动，頻率 $\omega_2 > \omega_1$。在这种情形下，兩个部分頻率是相同的，幷且每个部分頻率都对应于当一个摆固定在靜止位置时另一个摆的振动。显然，

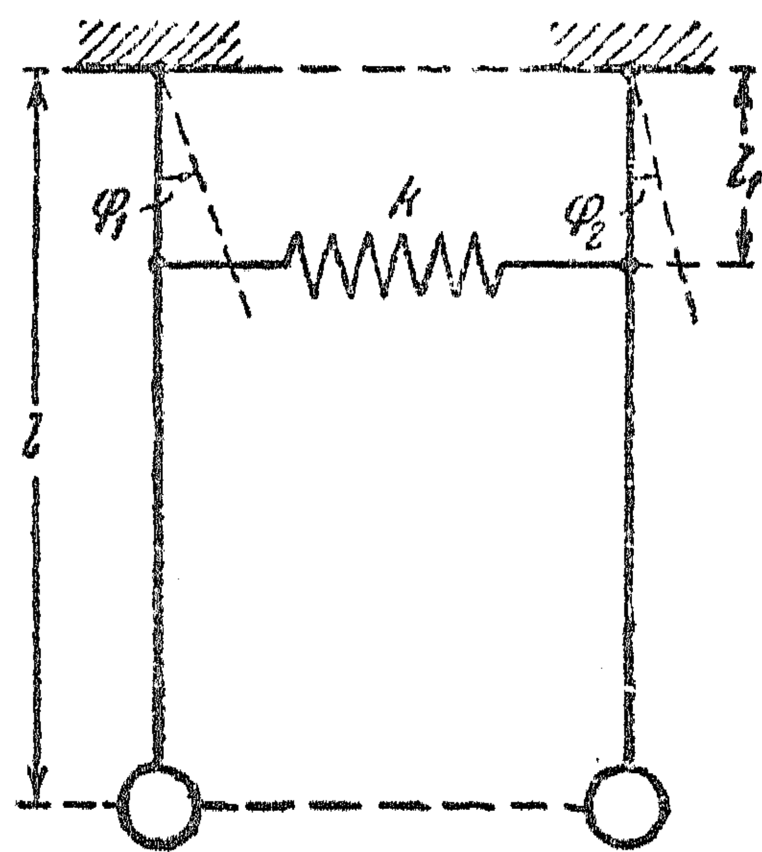


圖 171.

每一个部分頻率都大于 ω_1，但小于 ω_2。其实，在頻率为 ω_1 的振动时，彈簧的長度不变，从而它的剛度不影响振动的頻率；在以部分頻率振动时，彈簧的剛度使摆的振动頻率增加；在以頻率 ω_2 振动时，彈簧的中点是靜止的，因此，作用于每个摆上的彈簧，剛性比前一情况大。

§ 57. 系統的固有頻率与迴路間失諧 $\left(比值\frac{n_2}{n_1}\right)$的依存关系

現在来看看，当变更某个部分頻率，例如当变更 n_2 时，系統的固有頻率將怎样变化。令頻率 n_1 保持不变，而將 n_2 由 0 变到 ∞，为了方便起見，在討論中引用比值 n_2/n_1，即兩个部分頻率的比值。比值 $n_2^2/n_1^2=\xi$ 表征迴路的失諧。应当指出：当 $\xi=1$ 时，失諧为最小值；而当 $\xi=0$ 或 $\xi=\infty$ 时，失諧为最大值。假如把固有頻率 ω_1 和 ω_2 也表为与頻率 n_1 的比，那末，我們得到無因次形式的頻率依存关系。令 $z_1=\omega_1^2/n_1^2$，$z_2=\omega_2^2/n_1^2$ 以及 $z=\omega^2/n_1^2$。那末，方程式(56.6)可以改写为：

$$(1-\chi^2)z^2-(1+\xi)z+\xi=0. \tag{57.1}$$

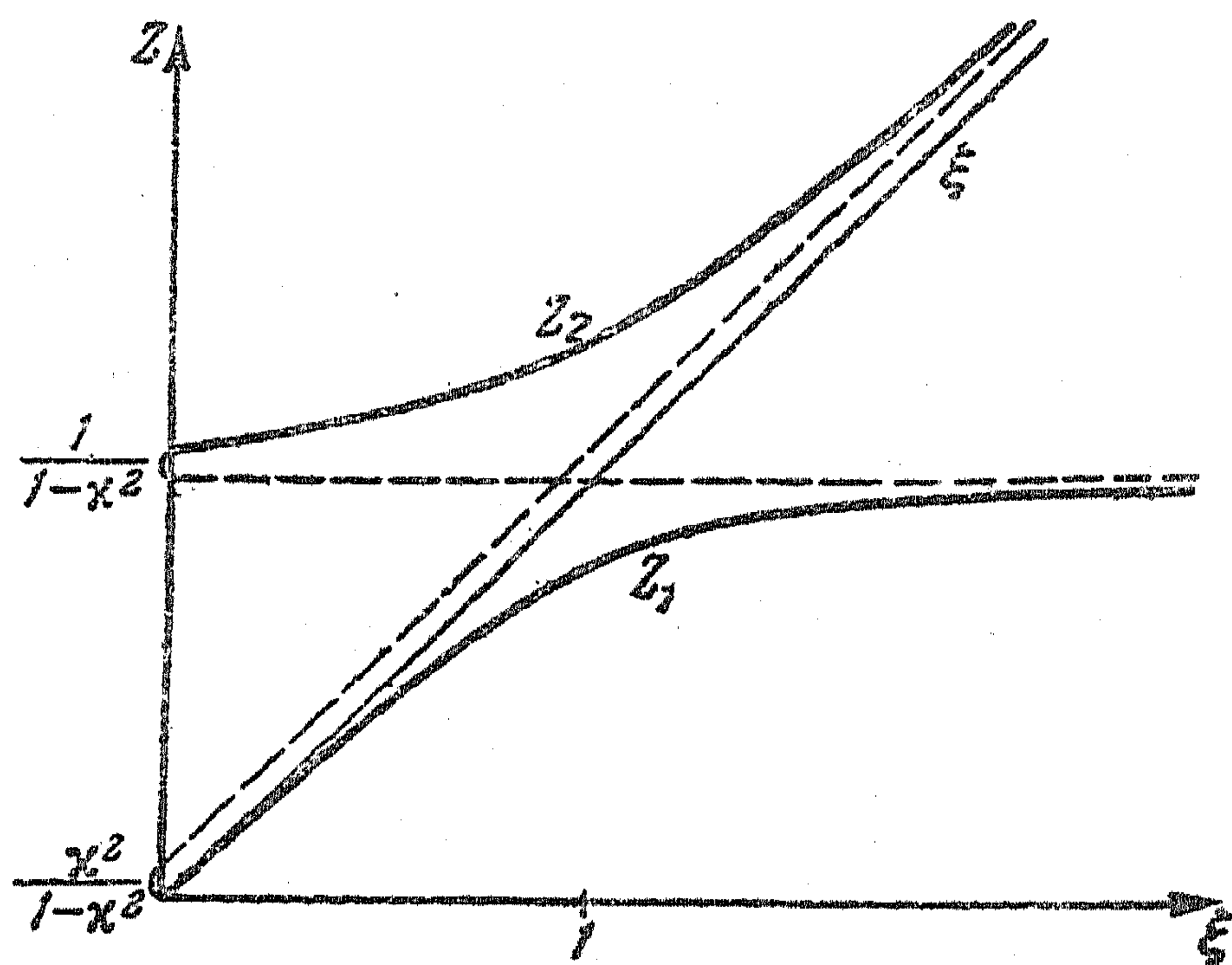


圖 172.

当耦合系数 χ 是給定值时，由上式所求出的 z_1 和 z_2 是 ξ 的函数。不难确信，$z(\xi)$ 是一个双曲綫方程式(圖 172)。

当 $\xi=0$ 时，$z_1=0$，$z_2=\dfrac{1}{1-\chi^2}$；当 $\xi\to\infty$ 时，$z_1\to1$，$z_2\to\infty$。

$z=1$ 是当 $\xi\to\infty$ 时 z_1 这一支的漸近綫，另一支 z_2 的漸近綫的方程式为：

$$z=\frac{\xi}{1-\chi^2}+\frac{\chi^2}{1-\chi^2};$$

这根漸近綫如圖 172 上的虛綫所繪。

圖 172 上的直綫 $z=1$ 可当作是与部分頻率 n_1 相对应的綫。这一部分頻率是保持不变的。直綫 $z=\xi$ 对应于部分頻率 n_2, z_1 对应于頻率 ω_1, z_2 对应于 ω_2。因此，由圖上可以看出：

$$\omega_2>n_2>n_1>\omega_1 \text{ 或 } \omega_2>n_1>n_2>\omega_1 \tag{57.2}$$

部分頻率总是介于固有頻率之間。当减小耦合时，ω_1 趋近于部分頻率：当 $\xi<1$ 时，ω_1 趋近于 n_2, 或者当 $\xi>1$ 时，ω_1 趋近于 n_1; 而当 $\xi<1$ 时，ω_2 趋近于 n_1, 当 $\xi>1$ 时，ω_2 趋近于 n_2。在 χ 为給定值的情况下，在两部分頻率接近重合($\xi=1$)时，固有頻率与部分頻率有显著的差别。当迴路間的失諧較大($\xi\to0$ 或 $\xi\to\infty$)时，固有頻率十分接近于部分頻率。当 $\xi\to0$ 时，

$$z_2=\frac{\omega_2^2}{n_1^2}\to\frac{1}{1-\chi^2},\quad z_1=\frac{\omega_1^2}{n_1^2}\to0, \tag{57.3}$$

或

$$\omega_2\to\frac{n_1}{\sqrt{1-\chi^2}},\ \omega_1\to0.$$

当 $n_2\to0$ 时，固有頻率 ω_1 趋于零，而固有頻率 $\omega_2\to\frac{n_1}{\sqrt{1-\chi^2}}$ 將大于另一迴路的頻率。因此，如果將一个电容器短路，或者在一迴路附近放一短路的电感綫圈，那末，迴路的固有頻率就会增高。

当 $\xi\to\infty$ 时，$z_2=\frac{\omega_2^2}{n_1^2}\to\infty$，可是在这种情形下，最好取

$$\frac{\omega_2^2}{n_2^2}=\frac{z_2}{\xi}\to\frac{1}{1-\chi^2}, \tag{57.4}$$

也就是 $\omega_2\to\frac{n_2}{\sqrt{1-\chi^2}}$, 而 $z_1=\frac{\omega_1^2}{n_1^2}\to1$ 或 $\omega_1\to n_1$.

当 $n_2\to\infty$ 时，固有頻率 ω_1 趋于 n_1, 而 ω_2 趋于 $n_2/\sqrt{1-\chi^2}$。

当 $\xi=1$ 时，即当兩部分頻率相等时，由(57.1)推出:

$$z_1=\frac{1}{1+\chi},\quad z_2=\frac{1}{1-\chi} \tag{57.5}$$

或者

$$\omega_1=\frac{n}{\sqrt{1+\chi}},\quad \omega_2=\frac{n}{\sqrt{1-\chi}}.$$

随着耦合的增加，固有頻率与部分頻率的相差越来越大，当失諧比較大时，也發生这种相差，但並不至相差到这样的程度。其实，在(57.3)和(57.4)的分母中有 χ^2，而这里(57.5)的分母中是 χ 的一次項。因为 $\chi<1$，所以当兩个迴路調諧在同一个部分頻率 $\xi=1$ 时，耦合 χ 对于固有頻率与部分頻率的差所产生的影响最大。

§58. 在具兩个自由度的無摩擦系統中（一般情形）的固有振动的理論

用 x_1 及 x_2 来代表系統的兩个独立坐标，那末，系統的位能可以写为下列形式:

$$U(x_1, x_2)=\alpha_{11}x_1^2+2\alpha_{12}x_1x_2+\alpha_{22}x_2^2. \tag{58.1}$$

要注意到，在平衡位置时，$x_1=0$ 和 $x_2=0$。使系統返回平衡位置的力，綫性地依存于坐标。因此，在平衡位置时，$U(0, 0)=0$，以及 $U(x_1, x_2)>0$ 是这样一种条件。在这种条件下，平衡位置是稳定的，或者在平衡位置的位能为最小値。由数学中知道，無論 x_1 及 x_2 为何値，只要下列条件成立:

$$\alpha_{11}>0,\quad \alpha_{22}>0 \quad 以及 \quad \alpha_{11}\alpha_{22}>\alpha_{12}^2, \tag{58.2}$$

則 $U(x_1, x_2)>0$。固有振动是在稳定平衡位置附近的运动，因此，对我們所討論的情形而言，位能表达式中的系数应該滿足条件(58.2)。

在一般的形式下，系統的动能可以写为:

$$T=\beta_{11}\dot{x}_1^2+2\beta_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2+\beta_{22}\dot{x}_2^2. \tag{58.3}$$

动能是正值，因此，在能量表达式中的一些系数，应該滿足一些和(58.2)式相似的条件，这些条件是：

$$\beta_{11}>0,\ \beta_{22}>0\ 以及\ \beta_{11}\beta_{22}>\beta_{12}^2. \qquad (58.4)$$

將系統的运动方程式表为拉格朗日方程式的形式最为簡單，关于每一个坐标的拉格朗日方程式可以写为下列形式：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}+\frac{\partial T}{\partial x}=Q_x, \qquad (58.5)$$

其中 Q_x 是坐标 x 方向的广义力，对我們所考虑的情况而言，广义力等于：

$$Q_x=-\frac{\partial U}{\partial x}.$$

因此，用通常的符号表示时，系統的运动方程式为：

$$\begin{aligned}\beta_{11}\ddot{x}_1+\beta_{12}\ddot{x}_2+\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2=0,\\ \beta_{12}\ddot{x}_1+\beta_{22}\ddot{x}_2+\alpha_{12}x_1+\alpha_{22}x_2=0.\end{aligned} \qquad (58.6)$$

具有 α_{12} 和 β_{12} 的項表征系統間的耦合，因此，可以引入無因次的耦合系数：

$$\gamma_1^2=\frac{\beta_{12}^2}{\beta_{11}\beta_{22}},\ \gamma_2^2=\frac{\alpha_{12}^2}{\alpha_{11}\alpha_{22}}, \qquad (58.7)$$

这兩个耦合系数表征平均耦合能量和部分系統中的平均能量的比值。由条件(58.2)和(58.4)可以推出：

$$\gamma_1<1,\ \gamma_2<1.$$

系数 γ_1 有时称为慣性耦合系数，而 γ_2 称为彈性耦合系数。如果 $\gamma_1=\gamma_2=0$，那末，部分系統都是被隔离了的系統，从而在每个系統中所發生的过程便与其他系統中的过程無关。

由方程式(58.6)可以看出，部分頻率等于：

$$n_1=\sqrt{\frac{\alpha_{11}}{\beta_{11}}},\ n_2=\sqrt{\frac{\alpha_{22}}{\beta_{22}}}. \qquad (58.8)$$

假定方程式組(58.6)有下列形式的特解：

$$x_1=Ae^{i\omega t},\ x_2=Be^{i\omega t},$$

將这特解代入(58.6)，我們就得到用来确定 A, B 和 ω 的方程式：

$$\begin{aligned}(\alpha_{11}-\omega^2\beta_{11})A+(\alpha_{12}-\omega^2\beta_{12})B=0\\(\alpha_{12}-\omega^2\beta_{12})A+(\alpha_{22}-\omega^2\beta_{22})B=0。\end{aligned}\qquad(58.9)$$

如果，

$$\begin{vmatrix}\alpha_{11}-\omega^2\beta_{11} & \alpha_{12}-\omega^2\beta_{12}\\ \alpha_{12}-\omega^2\beta_{12} & \alpha_{22}-\omega^2\beta_{22}\end{vmatrix}=0,\qquad(58.10)$$

則上述关于 A 和 B 的普通齐次方程組有解。这个（58.10）式就是用来确定固有頻率 ω_1 和 ω_2 的方程式，它可以改写为：

$$(\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}^2)\omega^4-$$
$$-(\alpha_{11}\beta_{22}+\alpha_{22}\beta_{11}-2\alpha_{12}\beta_{12})\omega^2+\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}^2=0.\qquad(58.11)$$

不难証明这一方程式的根 ω_1 和 ω_2 总是实根，并且部分頻率(58.8)总位于 ω_1 和 ω_2 之間。設

$$\phi(y)=(\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}^2)y^2-(\alpha_{11}\beta_{22}+\beta_{11}\alpha_{22}-2\alpha_{12}\beta_{12})y+\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}^2;$$

那末，$\phi(y)=0$ 是关于固有頻率的方程式。現在看一看 ϕ 怎样地依存于 y。根据(58.2)不难确信

$$\phi(0)=\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}^2>0,$$
$$\phi(n_1^2)=\phi\left(\frac{\alpha_{11}}{\beta_{11}}\right)=-\left(\beta_{12}\frac{\alpha_{11}}{\beta_{11}}-\alpha_{12}\right)^2<0,$$
$$\phi(n_2^2)=\phi\left(\frac{\alpha_{22}}{\beta_{22}}\right)=-\left(\beta_{12}\frac{\alpha_{22}}{\beta_{22}}-\alpha_{12}\right)^2<0,$$
$$\phi(\pm\infty)>0.$$

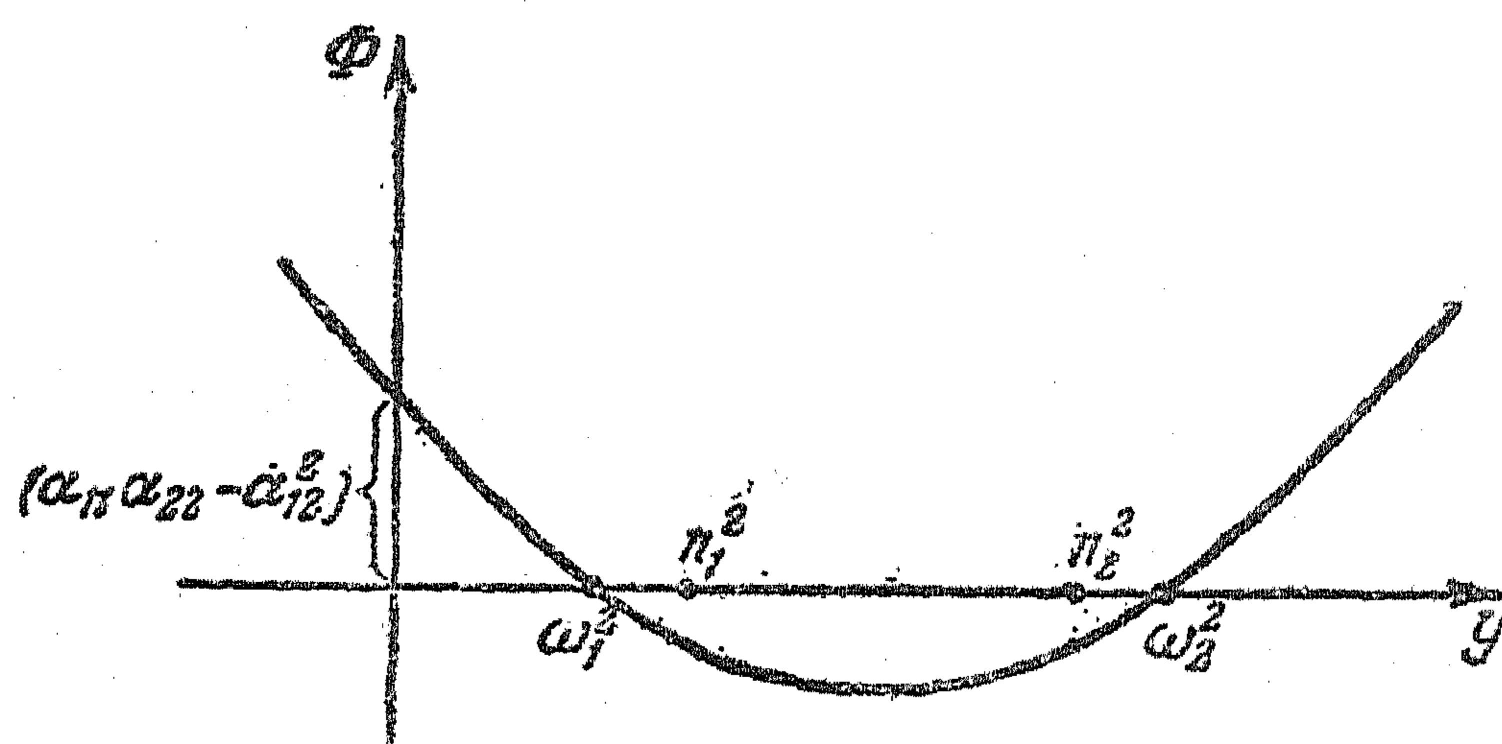


圖 173.

因此，曲綫 $\phi(y)$ 是一个如圖 173 所示的抛物綫。

由圖中可以看出：ω_1^2 和 ω_2^2 总是正値，n_1^2 和 n_2^2 总是介于 ω_1^2 和 ω_2^2 之間。关于这一点，在数学上可以由下列事实推出：系統的动能和位能本質上都是正値；在物理上这意味着，仅仅在稳定平衡位置附近的振动才是諧振动。

条件——部分頻率介于固有頻率之間——的意义是：当有耦合时，系統的較高的那个固有頻率，將比那个較高的部分頻率还高，而較低的那个固有頻率，將比那个較低的部分頻率还低，或者

說，在兩个隔离的系統之間倘若有耦合出現，那会使較高的那个部分頻率增高，而使較低的那个部分頻率减低。当分析一个复杂的系統时，这个簡單的准則是十分有用的。

由方程式(58.9)可以求出分布系数的值：

$$k_1=\frac{B_1}{A_1}=-\frac{\alpha_{11}-\omega_1^2\beta_{11}}{\alpha_{12}-\omega_1^2\beta_{12}}=-\frac{\alpha_{12}-\omega_1^2\beta_{12}}{\alpha_{22}-\omega_1^2\beta_{22}},$$
$$k_2=\frac{B_2}{A_2}=-\frac{\alpha_{11}-\omega_2^2\beta_{11}}{\alpha_{12}-\omega_2^2\beta_{12}}=-\frac{\alpha_{12}-\omega_2^2\beta_{12}}{\alpha_{22}-\omega_2^2\beta_{22}}。\tag{58.12}$$

系数 k_1 对应于頻率为 ω_1 的振动，k_2 对应于頻率为 ω_2 的振动。

在任何系統中的固有振动都可以写为：

$$x_1=\bar{A}_1e^{i\omega_1t}+\bar{A}_1^*e^{-i\omega_1t}+\bar{A}_2e^{i\omega_2t}+\bar{A}_2^*e^{-i\omega_2t},$$
$$x_2=k_1(\bar{A}_1e^{i\omega_1t}+\bar{A}_1^*e^{-i\omega_1t})+k_2(\bar{A}_2e^{i\omega_2t}+\bar{A}_2^*e^{-i\omega_2t}),$$

其中 $\bar{A}^*$ 是 $\bar{A}$ 的共軛数，我們要記住，旣然关于頻率的方程式(58.11)是四次方程式，所以我們必須写出 $e^{-i\omega t}$ 的項。$\bar{A}_1, \bar{A}_2$ 是兩个复数，并且依存于起始条件：$x_1(0), x_2(0), \dot{x}_1(0), \dot{x}_2(0)$。

將复杂系統中的振动用三角函数表出就比較明显。令 $2\bar{A}_1=$ $=A_1e^{i\varphi_1}$，$2\bar{A}_2=A_2e^{i\varphi_2}$，那末

$$x_1=A_1\cos(\omega_1t+\varphi_1)+A_2\cos(\omega_2t+\varphi_2),$$
$$x_2=k_1A_1\cos(\omega_1t+\varphi_1)+k_2A_2\cos(\omega_2t+\varphi_2),\tag{58.13}$$

其中 $A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2$ 是振动的振幅和相位，它們决定于起始条件。

根据分布系数的公式(58.12)并記住：部分頻率是位于固有頻率之間，便可以确定：在慣性耦合($\beta_{12}\neq0, \alpha_{12}=0$)时以及在彈性耦合($\beta_{12}=0, \alpha_{12}\neq0$)时，系数 k_1 和 k_2 的符号都是不相同的。这意味着，在不同坐标的振动中，有一个頻率的振动同相位，而另一个頻率的振动反相位。

为了闡明耦合特性对固有頻率的影响，在一般情况，需要利用与(57.1)相似的曲綫进行研究，可是現在因为失諧与頻率間的依

存关系是一个比較复杂的四次曲綫，因此，我們便不打算研究一般情形，而仅就部分频率相等的情况，来看看耦合系数与固有頻率的依存关系。假如將下式

$$n^2=\frac{\alpha_{11}}{\beta_{11}}=\frac{\alpha_{22}}{\beta_{22}}$$

代入(58.11)并考虑到(58.7)耦合系数的表示符号时，那末，便得到:

$$\omega_1^2=n^2\frac{1+\gamma_2}{1+\gamma_1},\quad \omega_2^2=n^2\frac{1-\gamma_2}{1-\gamma_1}, \tag{58.14}$$

由这里看出，变更慣性耦合(γ_1)和变更彈性耦合(γ_2)，对系統的固有頻率会产生不同的影响，增加 γ_1 会使 ω_1 減小，使 ω_2 增加；增加 γ_2 則产生相反的作用。仅仅为了正确的理解耦合特性的影响，每次都必須考慮哪一个固有頻率(ω_1 或 ω_2)比較大。其实，当 $\gamma_1<\gamma_2$(彈性耦合占优势)时，$\omega_1>\omega_2$；当 $\gamma_1>\gamma_2$(慣性耦合占优势)时，$\omega_1<\omega_2$。因此，当彈性(电容)耦合占优势时，当 $\gamma_1<\gamma_2$ 时，增加慣性(电感)耦合会使兩个固有頻率趋近；相反，当慣性耦合占优势时，增加慣性耦合会使兩个固有頻率远离。因此，当估計耦合对固有頻率的影响时，重要的是要知道哪一种耦合占优势，是彈性(电容)耦合呢？还是慣性(电感)耦合占优势？优势耦合的增加会使固有頻率互相远离；优势耦合的減小会使固有頻率互相趋近。

現在来指出一种特殊情形：在兩个部分頻率相等时，慣性耦合系数等于彈性耦合系数，即 $\gamma_1=\gamma_2$ 的情形。在这种情形下，由(58.14)可以看出，固有頻率等于部分頻率。耦合的存在不改变复杂系統的振动頻率，慣性(电感)耦合抵銷了彈性(电容)耦合。由耦合系数相等可以推出：

$$\gamma_1=\gamma_2=\frac{\alpha_{12}}{\sqrt{\alpha_{11}\alpha_{22}}}=\frac{\beta_{12}}{\sqrt{\beta_{11}\beta_{22}}},$$

考慮到部分頻率相等时，由上式可得：

$$\frac{\alpha_{12}}{\beta_{12}}=\frac{\sqrt{\alpha_{11}\alpha_{22}}}{\sqrt{\beta_{11}\beta_{22}}}=\frac{\alpha_{11}}{\beta_{11}}=\frac{\alpha_{22}}{\beta_{22}}. \tag{58.15}$$

將(58.15)代入分布系数的公式(58.12)，便得到:

$$k_1=\frac{0}{0},\quad k_2=\frac{0}{0}. \tag{58.16}$$

这意味着，在这种系統中会有一些同一頻率 $\omega_1=\omega_2=n$ 的諧振动。並且一个坐标的振动与另一坐标的振动完全無关，振幅的比可以为任何値。由于耦合的彈力剛好抵銷了耦合的慣性力，这个事实也是可以預料得到的。因此，假如能滿足条件(58.15)，那末，尽管在能量表达式和方程式中有耦合項存在，全系統却是由兩个各不相关的系統所組成。具兩个自由度的这种系統的最簡單的例子，如圖 174 所示。

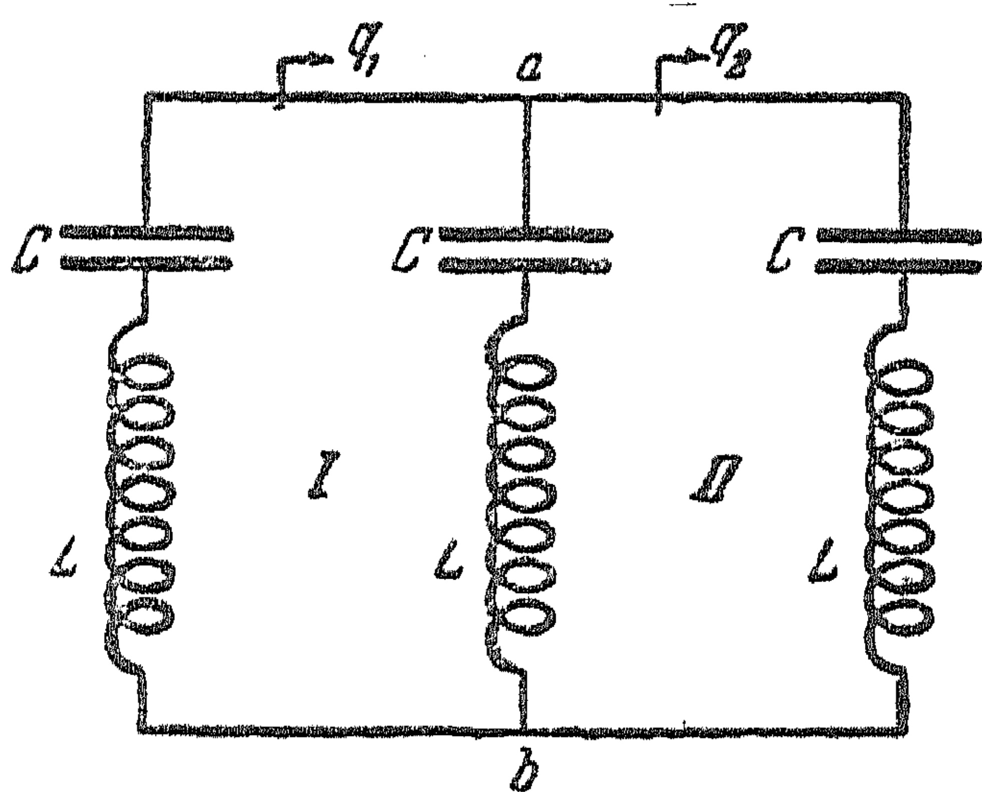


圖 174。

如果用 $q_1(t)$ 和 $q_2(t)$ 来代表在瞬間 t 流过相应各导体截面的电荷，並將电荷选为坐标，那末，不難确信，部分頻率是相同的，並都等于:

$$n=\frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{58.17}$$

系統的磁能为 $T=L\dot{q}_1^2+L\dot{q}_2^2-L\dot{q}_1\dot{q}_2$，电能为 $U=\frac{1}{C}q_1^2+\frac{1}{C}q_2^2-\frac{1}{C}q_1q_2$。显然，在以(58.17)中的 n 为頻率的第一个迴路中，無論产生怎样的振动，在 a 点和 b 点(圖 174)間的电位差总等于零。因而这种振动不会对第二个迴路中的过程产生任何影响，第二个迴路的振动也不会对第一个迴路产生任何影响。

§ 59. 彈性耦合摆的固有振动

我們用一般理論来分析由彈簧耦合的兩个摆(圖 175)的固有

振动。

假設悬挂摆錘的繩和彈簧都是無重量的。系統的参数和坐标已在圖上表出，于是，摆的动能的表达式和位能表达式具有下列形式:

$$T=\frac{m_1 l_1^2}{2}\dot{\varphi}_1^2+\frac{m_2 l_2^2}{2}\dot{\varphi}_2^2,$$

$$U=\frac{1}{2}l_1 m_1 g\varphi_1^2+\frac{1}{2}l_2 m_2 g\varphi_2^2+\frac{kl^2}{2}(\varphi_2-\varphi_1)^2. \tag{59.1}$$

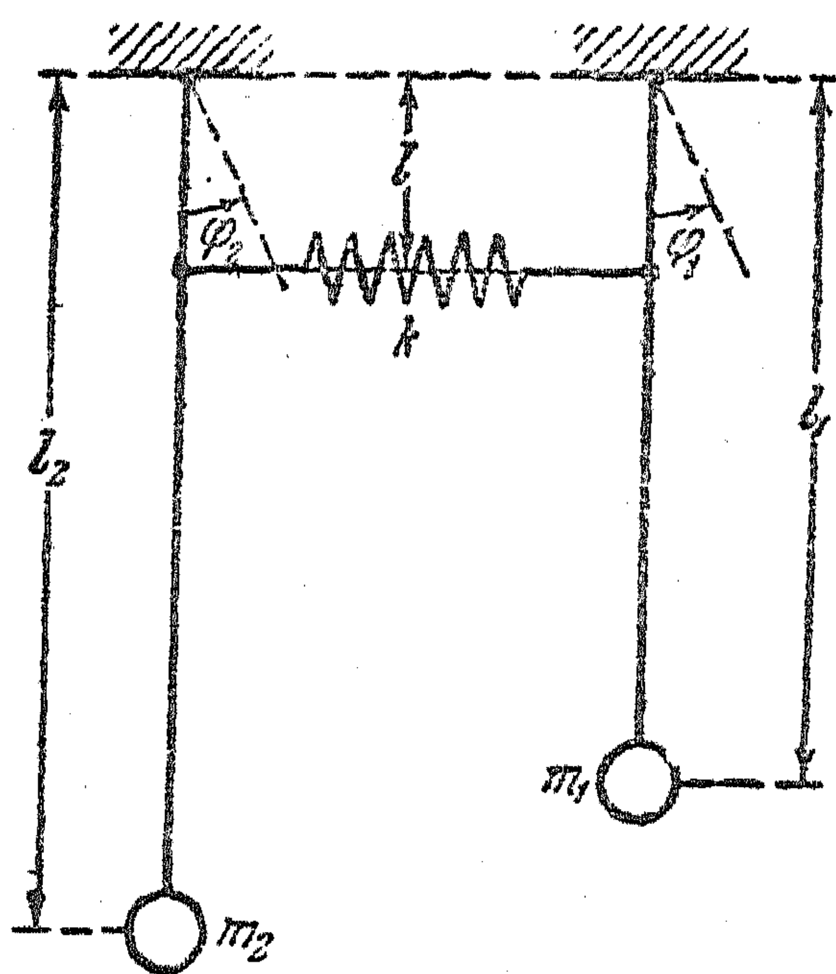


圖 175.

將(59.1)和 (58.1)以及 (58.3) 加以比較时，便得到能量系数的値:

$$\alpha_{11}=\frac{1}{2}(l_1 m_1 g+kl^2),$$

$$\alpha_{22}=\frac{1}{2}(l_2 m_2 g+kl^2),$$

$$\alpha_{12}=-\frac{1}{2}kl^2,\quad \beta_{12}=0, \tag{59.2}$$

$$\beta_{11}=\frac{1}{2}m_1 l_1^2,\quad \beta_{22}=\frac{1}{2}m_2 l_2^2.$$

因此，系統的部分頻率为:

$$n_1^2=\frac{g+\frac{kl^2}{l_1 m_1}}{l_1},\quad n_2^2=\frac{g+\frac{kl^2}{l_2 m_2}}{l_2}. \tag{59.3}$$

我們要注意，因为部分頻率是当一个摆不动时另一个摆的振动頻率，所以部分頻率决定于彈簧的剛度。

耦合系数具有下列値:

$$\gamma_1=0,\quad \gamma_2=\frac{k^2 l^4}{(l_1 m_1 g+kl^2)(l_2 m_2 g+kl^2)}. \tag{59.4}$$

將(59.2), (59.3)和(59.4)代入(58.11)时，我們便得到关于确定固有頻率的方程式:

$$(n_1^2-\omega^2)(n_2^2-\omega^2)-\gamma_2^2 n_1^2 n_2^2=0. \tag{59.5}$$

对电容耦合的兩个电迴路来說，其固有頻率的方程式具有和(59.5)一样的形式。

就方程式(59.5)而言，也可以像圖 172 所示的那样，繪出固有頻率与部分頻率的比值 $\xi=\frac{n_2^2}{n_1^2}$ 之間的依存关系圖。除了一些細节方面的差别，例如当 $\xi\to 0$ 时，$\omega_1\to 0, \omega_2\to 1$ 等等以外，这个关系圖和圖 172 具有一样的形狀。

有一点値得注意，就是当彈簧所耦合的摆是同样的摆，或者当 $n_1=n_2=n$ 时，那末，固有頻率为：

$$\omega_{1,2}^2=n^2(1\mp\gamma_2), \tag{59.6}$$

而根据(58.12)，分布系数为：

$$k_1=+1,\quad k_2=-1.$$

这意味着，当仅仅以第一个頻率振动时，兩个摆作同相位的振动。令兩个摆朝同一边偏轉同样的角度以后，將它們放开，放开时不使它們受到什么冲击力，这兩个摆就將以第一个頻率进行諧振动，振幅相等，相位也彼此相同 ($k_1=+1$)。在这种情形下，正如在 § 56 中曾經指出的，由于系統的对称性，不会产生第二个頻率的振动。如果將兩个摆向左右兩边拉开同一个角度，將它們放开，放开时，不使它們受到什么冲击力，那末，这兩个摆將以第二个頻率 ω_2 进行振动。在这种情形下，兩个摆所作的振动的相位彼此相反，但振幅相等($k_2=-1$)。

§ 60. 正則坐标

当研究具兩个自由度的系統中的固有振动的一般表达式(58.13)时，我們注意到，坐标 x_2 的振动和坐标 x_1 的振动表达式中各項大致一样，所不同的，不过是將 x_1 的每一項乘一常系数(分布系数)后，就成为 x_2 的每一項了，于是我們可以把各諧振項当作系統的一种新坐标。其实，如果用下列符号：

$$\xi = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad \eta = B\cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

那末,系統中振动的表达式(58.13)便具有下列形式:

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi + \eta, \\ x_2 &= k_1\xi + k_2\eta. \end{aligned} \tag{60.2}$$

等式(60.2)是由坐标 x_1 和 x_2 变到新坐标 ξ 和 η 的綫性变换公式。如果我們不用坐标 x_1 和 x_2,而选用新坐标 ξ 和 η,那末根据(60.1),很清楚,在任何起始条件下,每一个坐标都作頻率为 ω_1(或 ω_2)的諧振动。

坐标 ξ 和 η 称为系統的正則坐标,每一个正則坐标以固有頻率进行振动,有时我們說,以正則頻率振动。

也可以按另一种方式提出問題:能不能用綫性变换將坐标变为这样一种坐标,使得在采取这种坐标时,每个坐标都作純諧振动。或者說:能否找出这样一种坐标,使得在采取这种坐标时,动能和位能的表达式中的坐标乘积的系数等于零,也就是:

$$\beta_{12} = 0, \quad \alpha_{12} = 0. \tag{60.3}$$

經过了相应的計算以后,可以証明:所求的变换具有(60.2)的形式。

然而可以比較簡單的証明:在(60.2)的变换下,条件(60.3)能滿足,从而在能量的表达式中將沒有坐标乘积的項以及速度乘积的項。

其实,系統的位能为:

$$U = \alpha_{11}x_1^2 + 2\alpha_{12}x_1x_2 + \alpha_{22}x_2^2 =$$
$$= \alpha_{11}(\xi+\eta)^2 + 2\alpha_{12}(k_1\xi + k_2\eta)(\xi+\eta) + \alpha_{22}(k_1\xi + k_2\eta)^2 =$$
$$= \alpha'_{11}\xi^2 + \alpha'_{22}\eta^2, \tag{60.4}$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha'_{11} &= \alpha_{11} + \alpha_{22}k_1^2 + 2\alpha_{12}k_1, \\ \alpha'_{22} &= \alpha_{11} + \alpha_{22}k_2^2 + 2\alpha_{12}k_2. \end{aligned} \tag{60.5}$$

下面將証明,系数

$$\alpha'_{12}=\alpha_{11}+\alpha_{22}k_1k_2+\alpha_{12}(k_1+k_2) \tag{60.6}$$

等于零。同样，动能具有下列形式：

$$T=\beta'_{11}\dot{\xi}^2+\beta'_{22}\dot{\eta}^2, \tag{60.7}$$

其中

$$\beta'_{11}=\beta_{11}+\beta_{22}k_1^2+2\beta_{12}k_1,\quad \beta'_{22}=\beta_{11}+\beta_{22}k_2^2+2\beta_{12}k_2. \tag{60.8}$$

現在来証明系数

$$\beta'_{12}=\beta_{11}+\beta_{22}k_1k_2+\beta_{12}(k_1+k_2) \tag{60.9}$$

以及(60.6)的 α'_{12} 等于零。

由关于分布系数 k_1 的公式(58.12)得：

$$k_1(\omega_1^2\beta_{12}-\alpha_{12})=\alpha_{11}-\omega_1^2\beta_{11},$$

$$k_1(\omega_1^2\beta_{22}-\alpha_{22})=\alpha_{12}-\omega_1^2\beta_{12},$$

或者

$$\omega_1^2(\beta_{12}k_1+\beta_{11})=\alpha_{11}+\alpha_{12}k_1,$$

$$\omega_1^2(\beta_{22}k_1+\beta_{12})=\alpha_{12}+\alpha_{22}k_1. \tag{60.10}$$

將(60.10)的第二式乘以 k_2 后，与第一式相加，便得到：

$$\omega_1^2[\beta_{11}+\beta_{22}k_1k_2+\beta_{12}(k_1+k_2)]=$$

$$=\alpha_{11}+\alpha_{22}k_1k_2+\alpha_{12}(k_1+k_2). \tag{60.11}$$

用完全同样的方式，可由关于 k_2 的公式(58.12)，得到：

$$\omega_2^2[\beta_{11}+\beta_{22}k_1k_2+\beta_{12}(k_1+k_2)]=$$

$$=\alpha_{11}+\alpha_{22}k_1k_2+\alpha_{12}(k_1+k_2). \tag{60.12}$$

由(60.12)中減去(60.11)，得：

$$(\omega_2^2-\omega_1^2)[\beta_{11}+\beta_{22}k_1k_2+\beta_{12}(k_1+k_2)]=0.$$

因为一般总是 $\omega_1\neq\omega_2$，那末，由此可見，等式 $\beta'_{12}=0$ 和 $\alpha'_{12}=0$ 都是成立的。

用坐标 ξ 和 η 表出的运动方程式［拉格郎日方程式(58.5)］是：

$$\beta'_{11}\ddot{\xi}+\alpha'_{11}\xi=0,$$

$$\beta'_{22}\ddot{\eta}+\alpha'_{22}\eta=0. \tag{60.13}$$

因此，用正則坐标表出的固有振动是具有頻率 ω_1 和 ω_2 的諧振动(60.1)。考虑到(60.5)和(60.8)时，現在就可以將确定固有頻率的公式写成下列形式:

$$\omega_1^2=\frac{\alpha'_{11}}{\beta'_{11}}=\frac{\alpha_{11}+\alpha_{22}k_1^2+2\alpha_{12}k_1}{\beta_{11}+\beta_{22}k_1^2+2\beta_{12}k_1},$$

$$\omega_2^2=\frac{\alpha'_{22}}{\beta'_{22}}=\frac{\alpha_{11}+\alpha_{22}k_2^2+2\alpha_{12}k_2}{\beta_{11}+\beta_{22}k_2^2+2\beta_{12}k_2}. \tag{60.14}$$

正則振动可以用直接的方法观察到。假如有变換到正則坐标的某种專門設备，那末，在任何起始条件下作固有振动时，正則坐标將只作具某一个頻率的諧振动。变換到正則坐标的变換公式(60.2)可以写为:

$$\xi=\frac{x_2-k_2x_1}{k_1-k_2},$$

$$\eta=\frac{x_2-k_1x_1}{k_2-k_1}.$$

因此，假如作出这样一种裝置，它能將坐标 x_1 的値改变到 k_2 倍，并由坐标 x_2 的値中減去这一値，那末，結果这种裝置会給我們提供一个頻率为 ω_1 的諧振动，或者一个与正則坐标 ξ 成正比的坐标。

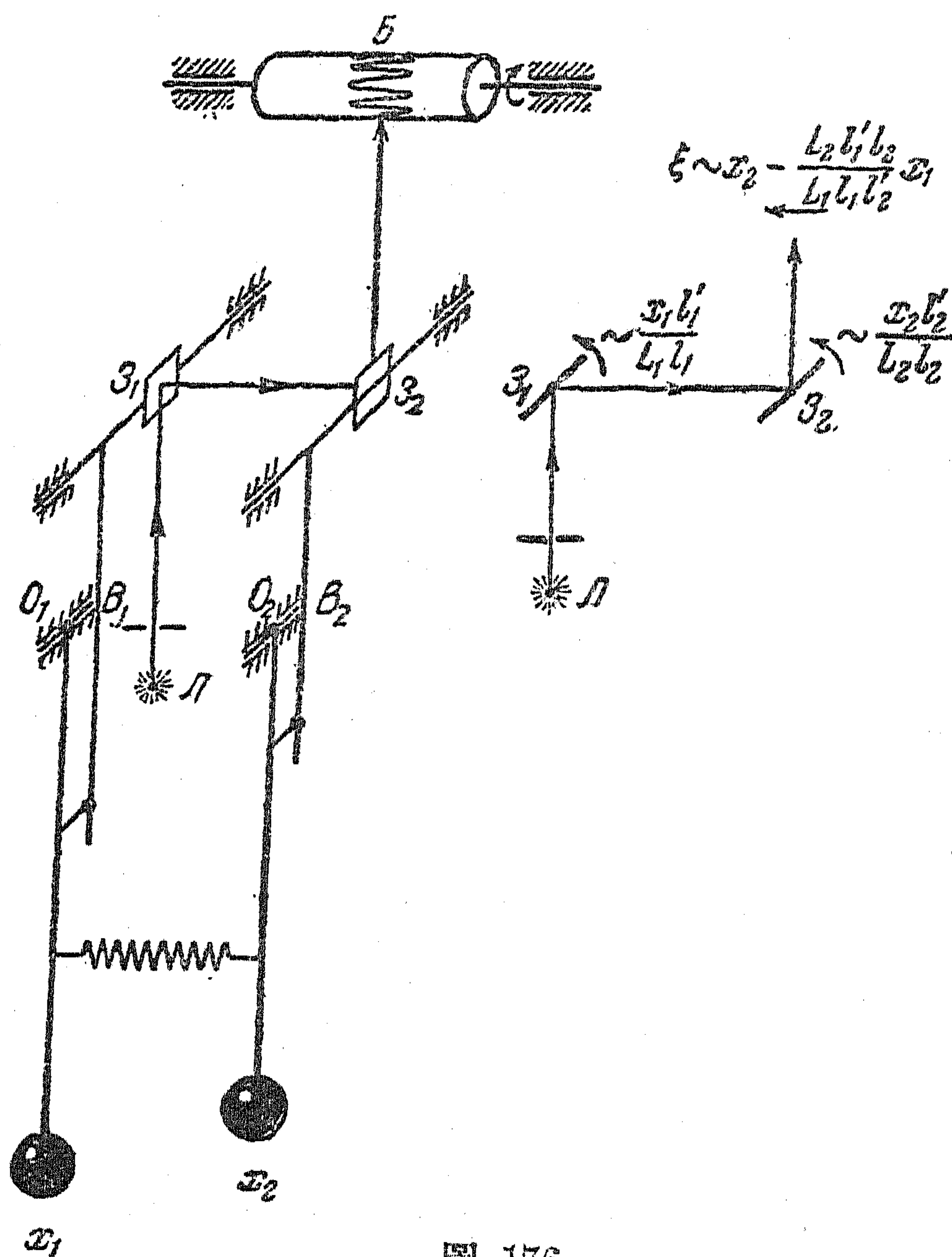


圖 176.

例如，对于由彈簧耦合的兩个摆来說，就可以作出这种裝置，它的原理圖如圖 176 所示。用这种裝置可以演示正則振动和正則

坐标。長度为 L_1 和 L_2 的兩个摆分別悬在 O_1 点和 O_2 点，摆的振动会引起兩个小鏡 3_1 和 3_2 的轉动，这兩个小鏡分別固定在一对平行軸上，位置高于悬点，平行軸垂直于摆的摆动平面。小鏡的旋轉是由兩个輕的杠杆 B_1 和 B_2 所引起的。这兩个杠杆一头固定在裝小鏡的軸上，另一头用鉸鏈跟摆連接起来，連接点低于点 O_1 和 O_2，并分別与它們相距 l_1' 和 l_2'。兩鏡的轉角自然是不大的，这兩个角度分別与摆的偏轉 x_1 和 x_2 成正比。由光源 $Л$ 所發出的光綫相繼的經过小鏡 3_1 和 3_2 反射，最后射在記录圓筒 $Б$ 上。如果杠杆 B_1 和 B_2 的有效長度分別等于 l_1 和 l_2，那末，在記录圓筒上光綫的偏轉將正比于

$$x_2=\frac{L_2l_1'l_2}{L_1l_1l_2'}x_1.$$

如果这样选擇杠杆的長度，使得

$$k_2=\frac{L_2l_1'l_2}{L_1l_1l_2'},\qquad(60.15)$$

那末，光綫在記录圓筒 $Б$ 上的偏轉，在一定的比例尺下，將等于正則坐标 ξ。不論用什么方法来激發摆的固有振动，当記录圓筒 $Б$ 旋轉时，都可以把純諧振动記录在感光紙上。

显然，用同样的方式也可以挑出另一个正則坐标。对于耦合的电迴路而言，要做出类似的可以观察正則坐标的裝置，在原理上也很簡單。

§61. 固有頻率是最小值

公式(60.14)表明着固有頻率和分布系数 k_1, k_2 之間的关系，要分析固有頻率，可以利用这一公式，要計算固有頻率，有时也可以利用它。

我們要注意，公式(60.14)可以簡單地直接由能量守恒定律导出。假定这样来选擇起始条件，使得仅仅以一个頻率 ω_1 进行振动，即:

$$x_1=A\cos\omega_1t,\quad x_2=k_1A\cos\omega_1t.$$

那末位能与动能为:

$$U=(\alpha_{11}+\alpha_{22}k_1^2+2\alpha_{12}k_1)A^2\cos^2\omega_1 t,$$
$$T=(\beta_{11}+\beta_{22}k_1^2+2\beta_{12}k_1)A^2\omega_1^2\sin^2\omega_1 t.$$

显然,当 $t=0$ 时,总能量E仅仅等于位能

$$E=A^2(\alpha_{11}+\alpha_{22}k_1^2+2\alpha_{12}k_1), \tag{61.1}$$

这是因为在这一瞬間动能T等于零。过了四分之一周期,当 $t=\frac{\pi}{2\omega_1}$ 时,全部能量变为动能,而位能等于零,所以

$$E=(\beta_{11}+\beta_{22}k_1^2+2\beta_{12}k_1)\omega_1^2A^2, \tag{61.2}$$

令(61.1)和(61.2)相等,便得到公式(60.14)。同样,也可得到关于 ω_2^2 的公式。

假如由于某种理由,我們知道分布系数 k_1 和 k_2,即使是大致上知道,那末,便可以利用公式(60.14)来确定固有频率。在实际上重要的是,对于 k_1 和 k_2 値的微小改变来說,公式(60.14)的反应并不灵敏。这是因为 ω_1^2 和 ω_2^2 是下列函数的最小値:

$$f(y)=\frac{\alpha_{11}+\alpha_{22}y^2+2\alpha_{12}y}{\beta_{11}+\beta_{22}y^2+2\beta_{12}y}. \tag{61.3}$$

当 $y=k_1$ 和 $y=k_2$ 时,函数(61.3)为極値。因此,和(60.14)加以比較时,我們得到 $\omega_1^2=f(k_1)$, $\omega_2^2=f(k_2)$。

現在来証明这一論据:因为根据(58.4)

$$\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}^2>0,$$

我們看出:

$$\beta_{11}+\beta_{22}y^2+2\beta_{12}y>0.$$

(61.3)的导函数为

$$f'(y)=$$
$$=\frac{(\beta_{11}+\beta_{22}y^2+2\beta_{12}y)(2\alpha_{22}y+2\alpha_{12})-(\alpha_{11}+\alpha_{22}y^2+2\alpha_{12}y)(2\beta_{22}y+2\beta_{12})}{(\beta_{11}+\beta_{22}y^2+2\beta_{12}y)^2}. \tag{61.4}$$

由公式(60.10)推出:

$$\frac{\alpha_{11}+\alpha_{12}k_1}{\beta_{11}+\beta_{12}k_1}=\frac{\alpha_{12}+\alpha_{22}k_1}{\beta_{12}+\beta_{22}k_1}. \tag{61.5}$$

將 $y=k_1$ 代入(61.4)中,并考虑到(61.5)时,便得到

$$f'(k_1)=0,$$

由此可見,当 $y=k_1$ 时,$f(y)$为極値;用完全一样的方法可以証明

$f'(k_2)=0$。因此，即令是大致上知道分布系数，那末，根据公式(60.14)，便可以相当准确地求出頻率。

例如，当 $n_1=n_2$ 时，由于对称的緣故，不难准确地求出 k_1 和 k_2，从而根据公式(60.14)求出固有頻率。假如 $n_1\neq n_2$，但彼此相差很少，那末，可以將 $n_1=n_2$ 的情况中所求出的 k_1 和 k_2 的値，代入公式(60.14)中去計算頻率。

§62. 兩个系統的耦合与耦合度
（兩个系統的相互作用）

我們曾經把在兩个耦合迴路中的振动，当作是在一个具兩个自由度的系統中的振动，这無疑是正确的。然而，在物理問題中，常常需要解决这样的問題：某一个迴路的出現以及在这迴路中的过程，对另一迴路中（另一部分系統中）的过程到底有多大的影响。一般說来，兩个迴路总是互相耦合的，那怕是極小的耦合。試問在什么条件下才可以忽略耦合，从而把每个迴路中的过程当作是在具有一个自由度的隔离系統中的过程？通常这样来回答：当耦合很小时便可以忽略它。可是与什么相比，耦合应該小呢？

正如我們在§60中見过的，在一般情形下，上一問題的答案之所以相当复杂，至少是因为耦合彈力部分地抵銷了耦合慣性力的作用。可是，假如在系統中只有一种类型的耦合，那末，便可簡單地来确定一般条件，在这种条件下，耦合对各个部分系統中的振动不产生重大的影响。就彈性耦合的系統而言，这种条件具有特別簡單的形式。

根据方程式(59.5)，在这种情形下，振动的固有頻率具有下列的値

$$\omega_{1,2}^2=\frac{1}{2}\left[(n_1^2+n_2^2)\pm\sqrt{(n_1^2+n_2^2)^2-4n_1^2n_2^2(1-\gamma_2^2)}\right],$$

最好把这一公式写成下列形式：

$$\omega_{1,2}^2=\frac{1}{2}\left[n_1^2+n_2^2\pm\sqrt{(n_1^2-n_2^2)^2+4n_1^2n_2^2\gamma_2^2}\right]. \qquad (62.1)$$

显然，如果 $\gamma_2\to0$，那末，$\omega_1\to n_1$，而 $\omega_2\to n_2$。但当 γ_2 为哪些値时，固有頻率就与部分頻率相差不大呢？由（62.1）不难看出，只有当 γ_2 的値滿足下列条件时，才能这样。

$$(n_1^2-n_2^2)^2\geqslant4\gamma_2^2n_1^2n_2^2. \qquad (62.2)$$

当 Л. И. 曼杰尔席塔姆分析这一問題时，他曾經引用了系統的耦合度的概念，并建議引用下列一量——耦合度系数：

$$\sigma=\gamma_2\frac{2n_1n_2}{|n_1^2-n_2^2|}. \qquad (62.3)$$

引用耦合度系数和兩系統的耦合度的概念的意义在于：兩系統之間的相互作用的特性，不仅仅在很大程度上决定于耦合力（γ_2）的大小，也决定于部分頻率相互間的接近程度。如果量 $\sigma\ll\ll1$（而不是 $\gamma_2\ll1$），那末，系統間的相互作用是微小的，或者說，如果耦合度微小时，系統間的相互作用是微不足道的。显然，当部分頻率彼此接近①，当 $n_1\to n_2$时，即使耦合（γ_2）的値不大，（62.3）的耦合度系数却显著的增大。如果部分頻率彼此相近，小的耦合力会对过程产生巨大的影响；相反，当失諧比較大，当部分頻率間有显著的差别时，即令耦合力相当大，它对每个系統中的振动，都不产生什么影响。

上述这些情况，在用耦合度系数表出的关于振幅分布系数 k_1 和 k_2 的公式中，可以特别清楚的看出来。假如將（62.1）所表出的頻率的値代入公式（58.12）中，并考虑到表示符号（58.7）和（62.3）时，那末，經过簡單的变换以后，便得到：

$$k_1=\sqrt{\frac{\beta_{11}}{\beta_{22}}}\ \frac{1-\sqrt{1+\sigma^2}}{2\sigma},\quad k_2=\sqrt{\frac{\beta_{11}}{\beta_{22}}}\ \frac{1+\sqrt{1+\sigma^2}}{2\sigma}. \qquad (62.4)$$

---

① 有时人們說“接近共振”。

由(62.4)中可以看出，当耦合度微小，当 $\sigma\to0$ 时，$k_1\to0$，而 $k_2\to\infty$。这就是說，在第一个迴路中，当頻率 ω_1 的振动具有有限振幅时，那末，在第二个迴路中，这同一頻率的振动將等于零；当第二个迴路中有頻率 ω_2 的振动时，那末在第一个迴路中，这一頻率的振动等于零。因此，在第一个迴路中仅仅發生頻率 ω_1（十分接近于 n_1）的振动，而在第二个迴路中仅仅發生頻率 ω_2（接近于 n_2）的振动，或者說，假如耦合度［但不是耦合(γ_2)］十分小($\sigma\to0$)，就可以將系統間的耦合忽略掉，并可以認为所有的振动都是單独的振动。

例如，当 $n_2\to n_1$ 时，即令是耦合 γ_2 十分小，耦合度 σ 却并不小。

对于慣性（或者电感）耦合而言，也可以引用耦合度系数，可是在这种情形下，在系数的定义中有一些小的差别，在原理方面并沒有任何改变。

§63. 在大耦合度情况下的振动

当部分頻率重合时($n_1=n_2$)，不管耦合是多么小，耦合度都是極大的($\sigma\to\infty$)。初看起来，我們会得出难以相信的結論：兩个相同的系統，無論它們之間的耦合是多么小，它們的互相作用总是很大的。兩个迴路，無論它們相隔多么远，总是互相作用的。这个結論和大家知道的事实显然是相矛盾的，为了弄清楚它，現在来詳細研究一下，兩个由彈簧耦合的摆"在共振时"的振动。

在这种情况下，根据(58.14)或者根据(59.6)，固有頻率为：

$$\omega_{1,2}=n^2(1\pm\gamma_2),$$

而分布系数为：

$$k_{1,2}=\pm1.$$

因此，固有振动可以写成下列形式：

$$\begin{aligned}\varphi_1&=A\cos(\omega_1t+\varepsilon_1)+B\cos(\omega_2t+\varepsilon_2),\\ \varphi_2&=A\cos(\omega_1t+\varepsilon_1)-B\cos(\omega_2t+\varepsilon_2).\end{aligned}\tag{63.1}$$

假如在起始瞬間，把能量儲藏于一个摆中，并給定这样的起始条件：$\varphi_1=a$, $\dot{\varphi}_1=0$, $\varphi_2=0$, $\dot{\varphi}_2=0$, 那末摆將以怎样的方式振动呢？为了解这一問題，我們把起始条件代入(63.1)中，就得到：

$$a=A\cos\varepsilon_1+B\cos\varepsilon_2,$$

$$0=A\cos\varepsilon_1-B\cos\varepsilon_2,$$

$$0=\omega_1 A\sin\varepsilon_1+\omega_2 B\sin\varepsilon_2,$$

$$0=\omega_1 A\sin\varepsilon_1-\omega_2 B\sin\varepsilon_2.$$

由后兩个方程式推出：

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=0.$$

于是由前兩个方程式得到：

$$A=B=\frac{1}{2}a,$$

因此，振动具有下列形式：

$$\varphi_1=\frac{1}{2}a(\cos\omega_1 t+\cos\omega_2 t),$$

$$\varphi_2=\frac{1}{2}a(\cos\omega_1 t-\cos\omega_2 t),$$

或者

$$\varphi_1=a\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\cdot\cos\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t,$$

$$\varphi_2=a\sin\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\cdot\sin\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t.$$

这种振动的形狀簡要地表出在圖 177 上。第一个摆的振动会减弱下去；而第二个摆的振动会逐漸增强；能量由一个系統向另一系統轉移，經过时間

$$t_1=\frac{\pi}{\omega_2-\omega_1} \qquad (63.2)$$

全部振动的能量完全轉移到第二个摆，往后，能量又开始朝相反方向轉移。因此，每經过一段时間 t_1, 能量总是由一个系統全部轉移到另一个系統。这便表明了在共振时的特征：兩系統之間存在着

强烈的相互作用，不論它們之間的耦合是多么小。

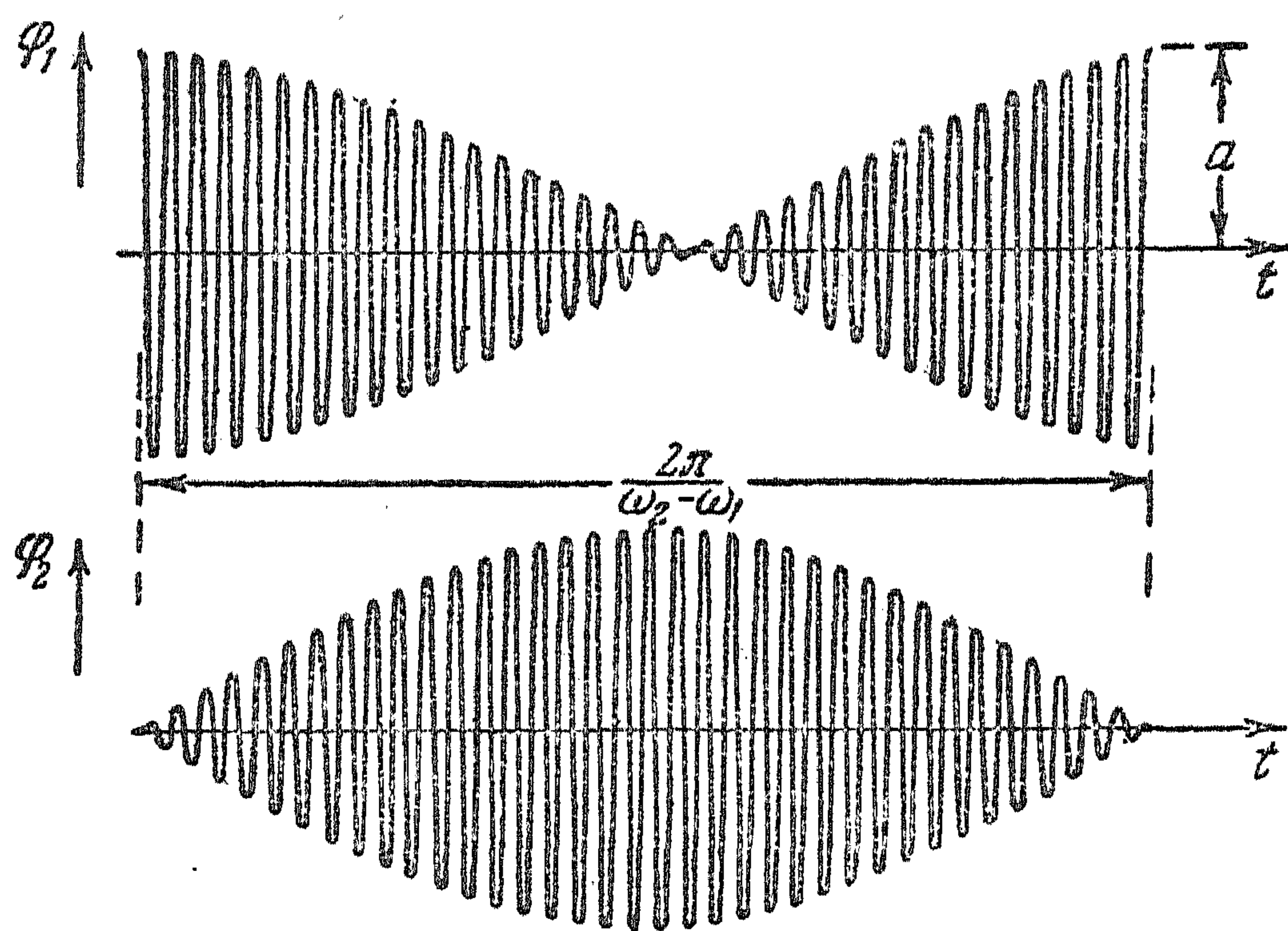


圖 177.

然而，能量由一个摆全部轉移到另一个摆所需要的时間是依存于耦合力的。其实，根据(59.6)

$$\omega_2-\omega_1=n(\sqrt{1+\gamma_2}-\sqrt{1-\gamma_2}),\qquad (63.3)$$

当耦合的値微小，当 $\gamma_2\ll 1$ 时，

$$\omega_2-\omega_1\approx n\gamma_2.\qquad (63.4)$$

將(63.4)代入(63.2)中，我們得到轉移时間

$$t_1\approx\frac{\pi}{n\gamma_2},\qquad (63.5)$$

轉移时間和耦合系数 γ_2 的値成反比，因此，当耦合很小时，轉移时間会变得很大。

因此，对于一般具有阻尼現象的現实系統來說，这种理論研究沒有什么意义。在耦合度頗大而耦合微小的情況下，尽管阻尼是非常小，都会使振动的情况發生根本的改变。这是因为第一个摆的振动还来不及使第二个摆作任何察覚得到的摆动时，它本身的振动便早已衰减掉了。摆振动的情況大致如圖 178 所示。因此，仅仅在轉移时間 t_1 比部分系統的时間常数 τ_0 小很多的情况下，

才可以应用前面所講的关于兩个無阻尼系統的耦合度理論的結果。

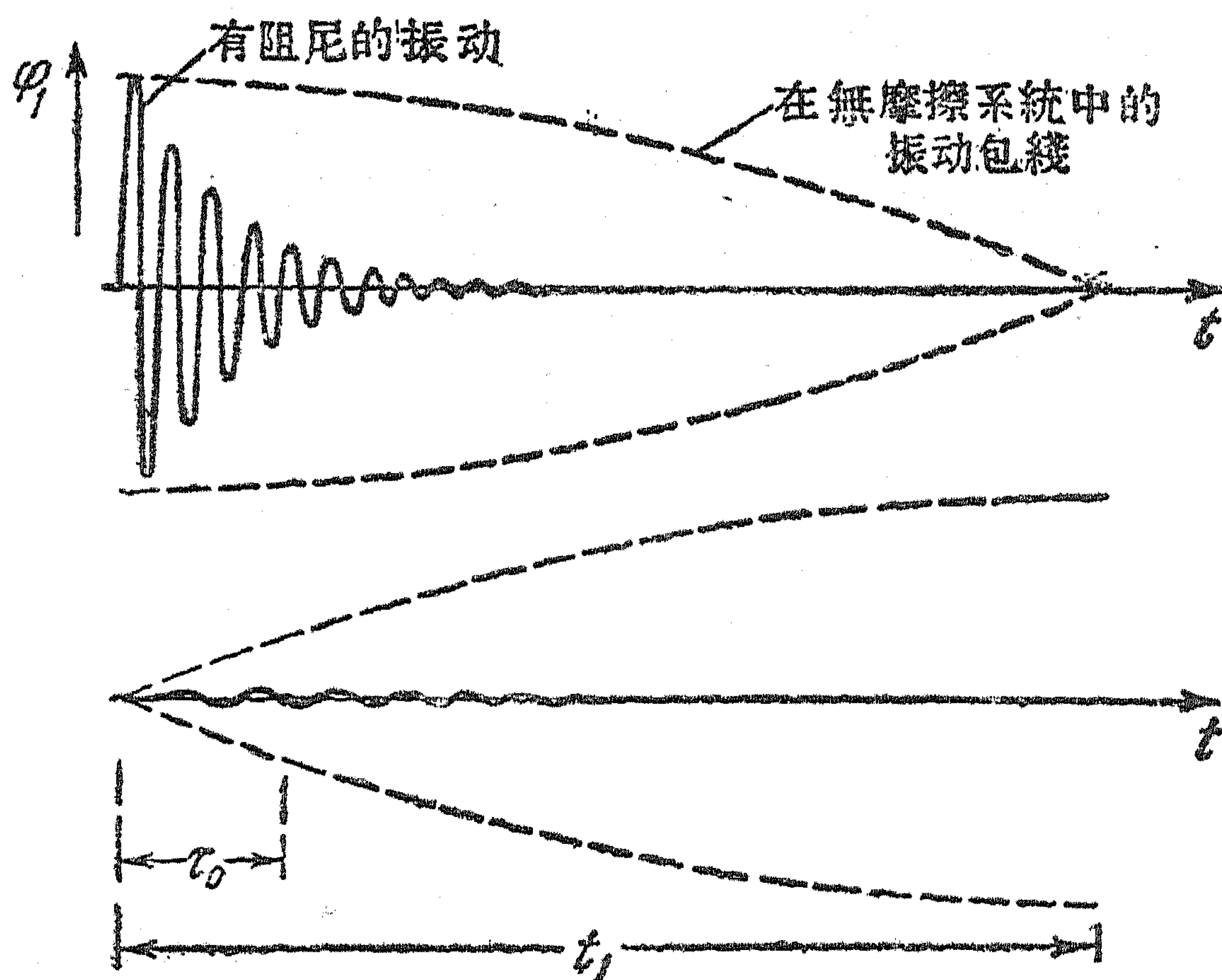


圖 178.

現在来研究当
$$\tau_0 \geqslant t_1$$
时，兩个摆的耦合的値所应滿足的条件。考慮到(63.5)时，这一条件可以写为下列形式：

$$\tau_0 = \frac{2m}{h} \geqslant \frac{\pi}{n\gamma_2}. \qquad (63.6)$$

根据(59.3)和(59.4)，

$$n\gamma_2 = \frac{kl^2}{l_1\sqrt{m(mgl_1+kl^2)}},$$

当耦合微小时，

$$n\gamma_2 \approx \frac{k}{m}\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(\frac{l}{l_1}\right)^{\frac{3}{2}}, \qquad (63.7)$$

式中 k 是耦合彈簧的剛度，l_1 是摆的長度，l 是由悬点到彈簧的距离，m 是摆的質量，h 是当摆的質量在周圍媒質中运动时的摩擦力系数。我們將杆的摩擦和在悬挂处的摩擦忽略不計。

將(63.7)代入(63.6)时，便得到：

$$h \ll \frac{k}{\pi}\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(\frac{l}{l_1}\right)^{\frac{3}{2}}. \qquad (63.8)$$

因此，当摩擦系数 h 为某个微小值时，我們便不能將和 k 以及 l 成正比的耦合减小得太多，以致破坏了条件(63.8)。当系統中有一定的摩擦，那怕是十分小的摩擦时，要現实系統中發生的情况跟我們將摩擦力忽略后由理論上所得到情况相接近，耦合应該有足够大的值。換句話說，在这种情况下，理論上的結論跟实际接近的程度，不仅决定于摩擦力的大小，并且决定于摩擦力和耦合力的比値。在理論研究中，摩擦力是忽略不計的。

然而还必須注意到，在物質結構的理論中，有时会碰到無阻尼系統的振动，在这里，無阻尼耦合系統的理論結果便具有重要的意义。在这里当有共振存在时，必須認为耦合是非常微小。

§64. 具兩个自由度的系統在有摩擦时的固有振动

摩擦力(或者迴路中的欧姆律电阻)的出現，会使振动过程的情况發生原則性的变化。当摩擦十分小而耦合足够大时，振动的情况和我們前几节中所講的很相近，可是这时振动已經不是一些諧振动的和，而是一些小阻尼振动的和，小阻尼振动經过一段时間以后是会終止的。当摩擦的値很大时，振动与一些諧振动的和完全沒有相似之处。

今后，我們假定系統中的摩擦力和运动的速度成正比，在这种情况下，由于摩擦力的緣故而轉变为热的能量，可以用类似于动能和位能表达式的耗散函数来表出。耗散函数依下列方式来确定:

$$F = \varepsilon_{11}\dot{x}_1^2 + \varepsilon_{22}\dot{x}_2^2 + 2\varepsilon_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2, \qquad (64.1)$$

并且这样选擇系数 ε_{11}, ε_{22} 和 ε_{12}, 使得

$$-\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} \text{ 和 } -\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2} \qquad (64.2)$$

分别等于沿坐标 x_1 和 x_2 作用的摩擦力。例如对于一个自由度的系統而言(其中摩擦力等于 $-h\dot{x}$)，耗散函数 $F=\frac{1}{2}h\dot{x}^2$ 显然与能量的导函数成正比，这能量由于摩擦力作功而轉变为热。

假如將动能和位能以(58.3)和(58.1)的形式表出，并把摩擦力(64.2)加进(58.5)的广义力 Q_x 中，在具兩个自由度的系統中一般形式的振动方程式，就可以由拉格朗日方程式求得。那末下式

$$\begin{aligned}&\beta_{11}\ddot{x}_1+\beta_{12}\ddot{x}_2+\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\varepsilon_{11}\dot{x}_1+\varepsilon_{12}\dot{x}_2=0,\\&\beta_{12}\ddot{x}_1+\beta_{22}\ddot{x}_2+\alpha_{12}x_1+\alpha_{22}x_2+\varepsilon_{12}\dot{x}_1+\varepsilon_{22}\dot{x}_2=0\end{aligned}\qquad(64.3)$$

便是具兩个自由度的系統当有摩擦存在时的振动方程式。

假定微分方程式(64.3)的特解具有下列形式

$$x_1=Ae^{\lambda t},\quad x_2=kAe^{\lambda t},\qquad(64.4)$$

式中 A, k 和 λ 都是常数，將(64.4)代入(64.3)时，便得到关于 k 的兩个方程式:

$$(\beta_{11}\lambda^2+\varepsilon_{11}\lambda+\alpha_{11})+(\beta_{12}\lambda^2+\varepsilon_{12}\lambda+\alpha_{12})k=0,$$

$$(\beta_{12}\lambda^2+\varepsilon_{12}\lambda+\alpha_{12})+(\beta_{22}\lambda^2+\varepsilon_{22}\lambda+\alpha_{22})k=0.$$

由上式，显然可得

$$k=-\frac{\beta_{11}\lambda^2+\varepsilon_{11}\lambda+\alpha_{11}}{\beta_{12}\lambda^2+\varepsilon_{12}\lambda+\alpha_{12}}=-\frac{\beta_{12}\lambda^2+\varepsilon_{12}\lambda+\alpha_{12}}{\beta_{22}\lambda^2+\varepsilon_{22}\lambda+\alpha_{22}}.\qquad(64.5)$$

由(64.5)的后一等式推出，λ 应該滿足下列方程式:

$$(\beta_{11}\lambda^2+\varepsilon_{11}\lambda+\alpha_{11})(\beta_{22}\lambda^2+\varepsilon_{22}\lambda+\alpha_{22})-$$
$$-(\beta_{12}\lambda^2+\varepsilon_{12}\lambda+\alpha_{12})^2=0,\qquad(64.6)$$

上式是 λ 的四次方程式，在一般情形下，它有如下的四个根:

$$\lambda_{1,2}=-\delta_1\pm i\omega_1,\quad \lambda_{3,4}=-\delta_2\pm i\omega_2.\qquad(64.7)$$

因为方程式(64.6)的系数是实数，所以它的根可能有如下的几种組合:兩对共軛复数根，复数根的实数部分用 $-\delta_1$ 和 $-\delta_2$ 来表示，虛数部分用 ω_1 和 ω_2 来表示;或者是一对实数根和一对复数根;或者全部都是实数根。

現在来研究最一般的情形，即有兩对共軛复数根的情形。当求出 λ 的値，并把它代入(64.5)时，便得到 k 的四个値，这四个値也是兩对共軛复数:

$$\bar{k}_1 \text{ 对应于 } \lambda_1, \quad \bar{k}_2 \text{ 对应于 } \lambda_3,$$
$$\bar{k}_1^* \text{ 对应于 } \lambda_2, \quad \bar{k}_2^* \text{ 对应于 } \lambda_4. \tag{64.8}$$

"星号"代表共軛复数。

以这为根据，可以將方程組(64.3)的解写为下列形式:

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar{A}e^{(-\delta_1+i\omega_1)t} + \bar{A}^*e^{(-\delta_1-i\omega_1)t} + \\ &\quad + \bar{B}e^{(-\delta_2+i\omega_2)t} + \bar{B}^*e^{(-\delta_2-i\omega_2)t}, \\ x_2 &= \overline{A}\bar{k}_1e^{(-\delta_1+i\omega_1)t} + \bar{A}^*\bar{k}_1^*e^{(-\delta_1-i\omega_1)t} + \\ &\quad + \bar{B}\bar{k}_2e^{(-\delta_2+i\omega_2)t} + \bar{B}^*\bar{k}_2^*e^{(-\delta_2-i\omega_2)t}. \end{aligned} \tag{64.9}$$

表达式(64.9)代表系統中的阻尼振动。假如用表示符号:

$$2\bar{A} = Ae^{i\varphi_1}, \quad \bar{k}_1 = ke^{i\chi_1},$$
$$2\bar{B} = Be^{i\varphi_2}, \quad \bar{k}_2 = ke^{i\chi_2},$$

那末，可以將(64.9)的振动用通常的形式写出:

$$x_1 = Ae^{-\delta_1 t}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + Be^{-\delta_2 t}\cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$
$$x_2 = Ak_1e^{-\delta_1 t}\cos(\omega_1 t + \varphi_1 + \chi_1) + Bk_2e^{-\delta_2 t}\cos(\omega_2 t + \varphi_2 + \chi_2).$$

A, B, φ_1 和 φ_2 这四个量是任意量，它們由起始条件来决定。δ_1, δ_2, ω_1, ω_2, k_1, k_2, χ_1, χ_2 这些量則决定于系統的参数。

系統中的振动是阻尼振动: 每个坐标分別作具有兩个頻率 ω_1 和 ω_2 以及兩个阻尼系数 δ_1 和 δ_2 的阻尼振动。(64.8) 的分布系数 $\bar{k}_1$ 和 $\bar{k}_2$ 是复数，这意味着，对于不同坐标的同一頻率的振动来說，它們的起始相位是不相同的，相位差的大小为 χ_1 和 χ_2，这些値依存于系統的参数。

因为这种情形下的固有振动是阻尼振动，而不是由諧振动組成的，所以，严格說来，便談不上有固有頻率。然而，將公式(64.7)中所表出的复数称为系統的固有頻率还是有意义的。

可以引用复数頻率的概念，这种頻率对应于(表征)阻尼振动：复数頻率的实数部分等于阻尼系数；复数頻率的虛数部分則对应于阻尼振动的諧型余因子的頻率。当引用了这一名詞以后，便可以說，和純諧振动对应的复数頻率的实数部分等于零。可以用复变数平面上的点来代表振动的頻率（圖 179）。在虛軸上的点对应于頻率 ω_0 的諧振动。点 I 和点 II 代表阻尼振动，点 III 代表具增長系数 δ_3 的增長振动。因此，当引用了复数頻率的概念时，便可以断言：有摩擦的系統的固有頻率是复数頻率；而無摩擦系統的复数固有頻率是純虛数。

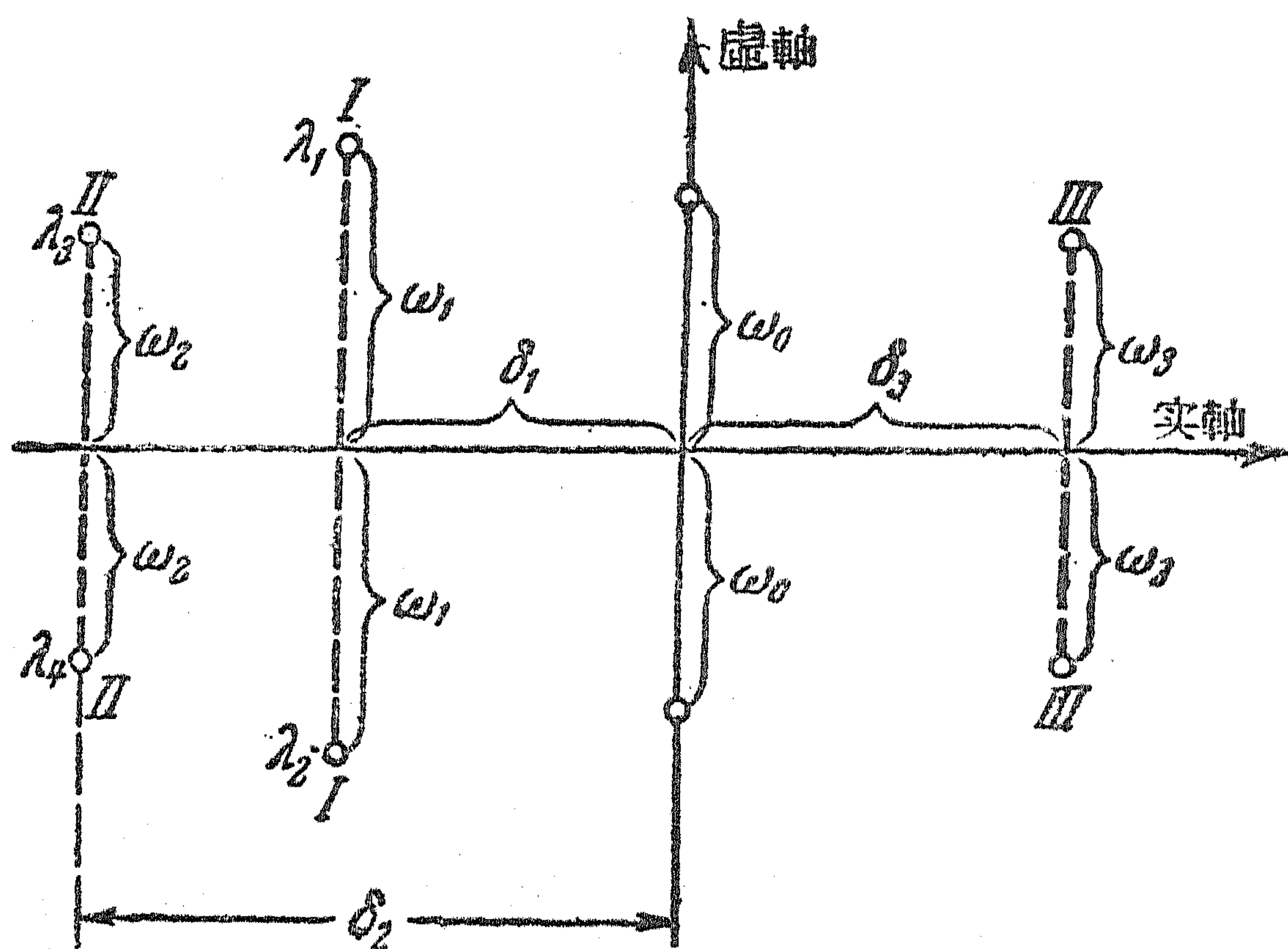


圖 179.

还要注意到，对于确定固有頻率的方程式(64.6)来說，它所有的根可能全部都是实数根。这与摩擦十分大的情况相对应，在摩擦十分大的时候，系統中沒有振动，而只有趋于零的有限运动。每个坐标的运动都是由一些趋于零的指数函数所組成。所有的复数固有頻率都是实数。也可能有这种情形：兩个根是实数，而另兩个根是复数(共軛复数)，这时运动系由一些阻尼振动以及按指数規律趋于零的运动的和所組成。

要确定一般情形下(具阻尼的系統)的固有頻率，或者求方程式(64.6)的解，那是一个相当困难的問題。因此，在实际上常常用近似的方法来求解。在下一节中，我們要举一个求这种解的例子。

§65. 具小阻尼的电感耦合迴路中的固有振动

設有兩个电感耦合的迴路(圖 180)，迴路的品質因数很大。对每个單独的迴路而言，

$$R \ll \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ 或 } Q \gg 1. \tag{65.1}$$

假如用 I_1 表示第一迴路中的电流，I_2 代表第二迴路中的电流，那末，由每个电路的电压方程式可得:

$$\begin{aligned} L_1\ddot{I}_1+M\ddot{I}_2+R_1\dot{I}_1+\frac{1}{C_1}I_1=0, \\ M\ddot{I}_1+L_2\ddot{I}_2+R_2\dot{I}_2+\frac{1}{C_2}I_2=0, \end{aligned} \tag{65.2}$$

采用符号: $\Delta_1=\frac{R_1}{2L_1}$，$\Delta_2=\frac{R_2}{2L_2}$，$n_1^2=\frac{1}{L_1C_1}$，$n_2^2=\frac{1}{L_2C_2}$ 和 $\gamma_1=\frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}$。那末，固有頻率的方程式(64.6)便具有下列形式:

$$(\lambda^2+2\Delta_1\lambda+n_1^2)(\lambda^2+2\Delta_2\lambda+n_2^2)-\gamma_1^2\lambda^4=0. \tag{65.3}$$

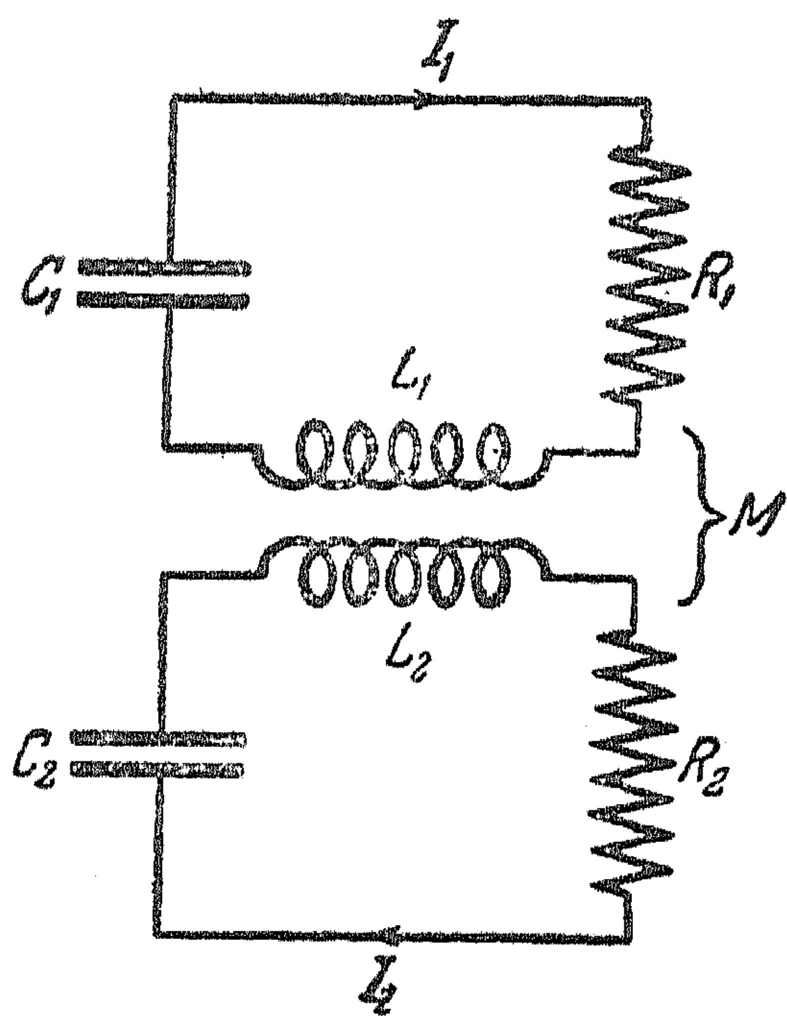


圖 180.

当 $\Delta_1\to0, \Delta_2\to0$ 时，方程式(65.3)的解为

$$\lambda_{1,2}\to\pm i\omega_{1,2},$$

式中的 $\omega_{1,2}$ 是上述迴路所組成的系統在無阻尼情况下的固有頻率。

由条件(65.1)推出:

$$\frac{\Delta_1}{n_1}\ll1, \quad \frac{\Delta_2}{n_2}\ll1.$$

假定方程式(65.3)的特解可以近似地写为:

$$\lambda=i\omega-\delta, \tag{65.4}$$

式中 $\delta\ll\omega$; 因此，將 δ^2 忽略时，$\lambda^2=-\omega^2-2i\omega\delta$。將这式代入方程式(65.3)，得:

$$\begin{aligned} [-\omega^2-2i\omega\delta+2\Delta_1(i\omega-\delta)+n_1^2][-\omega^2-2i\omega\delta+2\Delta_2(i\omega-\delta)+ \\ +n_2^2]-\gamma_1^2(\omega^4+4i\omega^3\delta-6\omega^2\delta^2)=0, \end{aligned} \tag{65.5}$$

將含有小因子 $\delta^2, \delta\Delta_1, \delta\Delta_2$ 的一些項忽略时，便得到:

$$[n_1^2-\omega^2+2i\omega(\Delta_1-\delta)][n_2^2-\omega^2+2i\omega(\Delta_2-\delta)]-\gamma_1^2\omega^4-\gamma_1^2 4i\omega^3\delta=0. \tag{65.6}$$

对于無阻尼($\delta=0$)的系統而言，

$$(n_1^2-\omega^2)(n_2^2-\omega^2)-\gamma_1^2\omega^4=0. \tag{65.7}$$

因此，由(65.6)我們得到关于确定 δ 的下列方程式:

$$(n_1^2-\omega^2)\Delta_2+(n_2^2-\omega^2)\Delta_1-[n_1^2+n_2^2-2\omega^2(1-\gamma_1^2)]\delta=0. \quad (65.8)$$

把解(65.7)所求得的固有頻率 ω_1 和 ω_2 代入上式时，便得到:

$$\left.\begin{aligned}\delta_1&=\frac{(n_1^2-\omega_1^2)\Delta_2+(n_2^2-\omega_1^2)\Delta_1}{n_1^2+n_2^2-2\omega_1^2(1-\gamma_1^2)},\\ \delta_2&=\frac{(n_1^2-\omega_2^2)\Delta_2+(n_2^2-\omega_2^2)\Delta_1}{n_1^2+n_2^2-2\omega_2^2(1-\gamma_1^2)}①.\end{aligned}\right\} \quad (65.9)$$

記得 $\omega_1<n_1<n_2<\omega_2$ 这一条件以及关于确定固有頻率的方程式 (64.6)时，不难証明: $\delta_1>0$ 和 $\delta_2>0$。

同样的方法，可以由(64.5)近似地求出分布系数的値。因为 $\frac{\alpha_{11}}{\beta_{11}}=n_1^2$, $\frac{\varepsilon_{11}}{\beta_{11}}=2\Delta_1$, $\beta_{11}=L_1,\beta_{22}=L_2,\beta_{12}=M$, 所以:

$$k=-\frac{\lambda^2+n_1^2+2\lambda\Delta_1}{\gamma_1\lambda^2}\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}. \quad (65.10)$$

將(65.4)代入(65.10)，便得到:

$$\bar{k}=\frac{n_1^2-\omega^2-2i\omega\delta+2\Delta_1(i\omega-\delta)+\delta^2}{\gamma_1(-\omega^2-2i\omega\delta+\delta^2)}\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}.$$

將含有因子 $\delta^2, \delta\Delta_1, \gamma_1^2\delta$ 的一些微小的項忽略时，我們便求出了分布系数的近似値

$$\bar{k}_{1,2}\approx\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}\ \frac{n_1^2-\omega_{1,2}^2-i2\omega_{1,2}(\delta_{1,2}-\Delta_1)}{\gamma_1\omega_{1,2}^2}.$$

分布系数还可以写为:

$$\bar{k}_{1,2}=k_{1,2}e^{i\chi_{1,2}}, \quad (65.11)$$

其中

$$k_{1,2}\approx\frac{1}{\gamma_1\omega_{1,2}}\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}\sqrt{\frac{(n_1^2-\omega_{1,2}^2)^2}{\omega_{1,2}^2}+4(\Delta_1-\delta_{1,2})^2},$$

$$\operatorname{tg}\chi_{1,2}=\frac{2(\Delta_1-\delta_{1,2})}{n_1^2-\omega_{1,2}^2}\omega_{1,2}.$$

因此，在耦合迴路中的振动將具有下列形式:

$$I_1\approx Ae^{-\delta_1 t}\cos(\omega_1t+\varphi_1)+Be^{-\delta_2 t}\cos(\omega_2t+\varphi_2),$$

$$I_2\approx Ak_1e^{-\delta_1 t}\cos(\omega_1t+\varphi_1+\chi_1)+Bk_2e^{-\delta_2 t}\cos(\omega_2t+\varphi_2+\chi_2).$$

当阻尼非常微小时，在耦合迴路中的固有振动由兩个阻尼振动組成，这兩个阻尼振动的諧型余因子具有頻率 ω_1 和 ω_2—耦合迴路的固有頻率。关于不同坐标的同一頻率的諧型余因子，其起始相位是不相同的，它們相差的大小等于(65.11)的 χ_1 和 χ_2; 不同頻率的阻尼系数 δ_1 和 δ_2 是不相同的，而在兩迴路中同一頻率的振动則同样的衰减。由公式(65.9)可以看出，阻尼系数与兩个迴路的阻尼系数 Δ_1 和 Δ_2 有关; 如果只有一个迴路中有阻尼，那末，振动仍旧与阻尼振动沒有什么兩样。假如兩部分頻率彼此相

① 注意，假如在(65.4)中，我們写出 $\lambda=-i\omega-\delta$, 那末，所得到的同样是这种关于 δ_1 和 δ_2 的公式。

差很大，那末

$$n_2^2-\omega_1^2 \gg n_1^2-\omega_1^2$$

于是由(65.9)得知，δ_1 基本上与 Δ_1 有关，而与 Δ_2 的关系则很小；同样 δ_2 基本上与 Δ_2 有关，而与Δ_1关系则很小。当耦合(以及耦合度)微小时，$\delta_1 \to \Delta_1$，$\delta_2 \to \Delta_2$，或者說，該迴路的阻尼确定着与該迴路部分频率相近的那一频率的阻尼。在这种情况下，分布系数是这样的，就是使得在每一迴路中，和它的固有频率相近的那个振动会占优势。

研究具两个自由度的系統中的阻尼固有振动，对于考察不稳定运动具有重要的意义。

§66. 諧外力对具兩个自由度的無阻尼的系統的作用

現在来研究某一頻率的諧外力对具兩个自由度的系統的作用。因为系統是綫性的，所以对于这种系統的振动来說，叠加原理是适用的。因此，当知道在諧外力作用下所产生的振动时，便可以研究出由諧力的和所組成的任何力所引起的振动，特别是由任何形式的周期性力所引起的振动。

当然，在实际中所碰到的，总会是有阻尼的系統。然而，仿照前面講的情形，为了使理論分析明了起見，我們現在来研究周期性力对無阻尼系統的作用。

假定有一頻率 p 的諧外力，作用于系統的每一个坐标上，那末，当引用在 §58 中用过的表示符号时，一般形式的振动方程式便可以写成：

$$\left.\begin{aligned}\beta_{11}\ddot{x}_1+\beta_{12}\ddot{x}_2+\alpha_{11}x_1+\alpha_{11}x_2=F_1\cos pt,\\ \beta_{12}\ddot{x}_1+\beta_{22}\ddot{x}_2+\alpha_{12}x_1+\alpha_{22}x_2=F_2\cos pt,\end{aligned}\right\}\qquad(66.1)$$

其中 F_1 和 F_2 是外力的振幅。

显然，系統中的振动会含有固有振动和受迫振动。固有振动我們早已研究过，因此，現在我們只分析受迫振动。为了便于計算起見，我們用复数方法。設外力具有 F_1e^{ipt} 和 F_2e^{ipt} 的形式；于是，假定受迫振动具有下列形式：

$$x_1=\overline{X}_1e^{ipt},\ x_2=\overline{X}_2e^{ipt}.$$

并將上式代入(66.1)中，便得到用于确定复数振幅的方程式:

$$\begin{aligned}\bar{X}_1(-\beta_{11}p^2+\alpha_{11})+\bar{X}_2(-\beta_{12}p^2+\alpha_{12})=F_1,\\ \bar{X}_1(-\beta_{12}p^2+\alpha_{12})+\bar{X}_2(-\beta_{22}p^2+\alpha_{22})=F_2.\end{aligned} \tag{66.2}$$

由这里得

$$\begin{aligned}\bar{X}_1=\frac{1}{D}[F_1(\alpha_{22}-\beta_{22}p^2)-F_2(\alpha_{12}-\beta_{12}p^2)],\\ \bar{X}_2=\frac{1}{D}[-F_1(\alpha_{12}-\beta_{12}p^2)+F_2(\alpha_{11}-\beta_{11}p^2)],\end{aligned} \tag{66.3}$$

其中

$$D=(\alpha_{11}-\beta_{11}p^2)(\alpha_{22}-\beta_{22}p^2)-(\alpha_{12}-\beta_{12}p^2)^2 \tag{66.4}$$

是方程組(66.2)的行列式。

假如 F_1 和 F_2 是实数，那末，$\bar{X}_1$ 和 X_2 也是实数；这意味着，兩个坐标的受迫振动与外力同相位(或者反相位)。

公式(66.3)代表在每个系統中受迫振动的振幅与外力頻率 p 之間的依存关系。也就是系統的共振依存关系。

現在来研究这种依存关系。首先确定使振动振幅变为無穷大的那种頻率——共振頻率。不难看出，当

$$D=0, \tag{66.5}$$

也就是当方程組(66.2)的行列式等于零时，便是这种頻率。方程式(66.5)就是关于确定固有頻率的方程式(58.10)，因此，在这种情形下，即假如外力頻率 p 与系統的一个固有頻率 ω_1 相等时，便会出現共振(或者受迫振动的振幅为無穷大)。共振在 ω_1 和 ω_2 这兩个頻率时出現，在共振时，兩个坐标的振动振幅都趋于無穷大。

应該指出，兩个自由度系統中的共振，和一个自由度系統中的共振，有一个重要的不同之特点。在具一个自由度的系統中，当外力頻率与固有頻率相等时，总会發生共振；而在具兩个自由度的系統中，当

$$p=\omega_1$$

以及

$$F_1(\alpha_{22}-\beta_{22}\omega_1^2)-F_2(\alpha_{12}-\beta_{12}\omega_1^2)=0$$

的情形下，却不会發生共振。

其实这时，

$$X_1=\frac{0}{0},$$

第一个坐标的振动振幅是有限値。而第2个坐标的振幅也不会是無穷大，这是因为在这种情形下，根据(58.12)

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{\alpha_{12}-\beta_{12}\omega_1^2}{\alpha_{22}-\beta_{22}\omega_1^2}=\frac{\alpha_{11}-\beta_{11}\omega_1^2}{\alpha_{12}-\beta_{12}\omega_1^2}=-k_1, \qquad (66.6)$$

外力振幅的比値等于頻率 ω_1 的分布系数。

当頻率符合时而不發生共振的条件，可以用这种方式来表出：命 X_{10} 和 X_{20} 分别是坐标 x_1 和 x_2 关于頻率 ω_1 的固有振动的振幅，那末，根据(66.6)，

$$k_1=\frac{X_{20}}{X_{10}}=-\frac{F_1}{F_2},$$

或者

$$F_1X_{10}+F_2X_{20}=0. \qquad (66.7)$$

条件(66.7)在形式上与兩个向量的正交性条件类似，因此，有时便說：假如外力与固有振动正交，便不会有共振，在物理上它的意义是，当振动时，在一个坐标的力所作的功，与在另一坐标的力所作的功相等而相反，外力并不作功，因此，振幅不会趋于無穷大。显然，仅仅当兩个力作用于系統上时，才有这种情形。

重要的实际情形，是当只有一个力作用于系統上。例如当 $F_2=0$ 的情形，这时，根据(66.3)，振动的振幅可以簡單地表为：

$$X_1=\frac{F_1}{D}(\alpha_{22}-\beta_{22}p^2),\ X_2=\frac{F_1}{D}(\beta_{12}p^2-\alpha_{12}). \qquad (66.8)$$

受迫振动振幅的比値

$$k_p=\frac{X_2}{X_1}=\frac{\beta_{12}p^2-\alpha_{12}}{\alpha_{22}-\beta_{22}p^2} \qquad (66.9)$$

和固有振动的分布系数(58.12)具有一样的形式，不过只是將其中的 ω_1 和 ω_2 換成了振动頻率 p。因此，假如 $p\to\omega_1$ (或 $p\to\omega_2$)，則受迫振动振幅的比値和固有振动振幅的比値几乎是一样的。

当外力作用于坐标 X_1 上时，关于这一坐标的振动振幅的共振曲綫，形狀大致如圖 181 a 所示。当 $p=0$ 时，振幅具有某个确定的値，而当頻率不大时，振动与外力同相位，此后，当 $p\to\omega_1$ 时，振幅增加到無穷大。当 $\omega_1<p<n_2$ 时，振动振幅減小，振动与外力的振动反相位。应当指出，当 $p=n_2$ 时，振动振幅等于零。用具兩个自由度的系統来作为濾波器和阻尼器，就是以这为根据。假如外力頻率和沒有外力作用的第二个系統的部分頻率相等，那末，尽管在第一个系統中有周期性外力的作用，但在第一个系統中却沒有受迫振动。

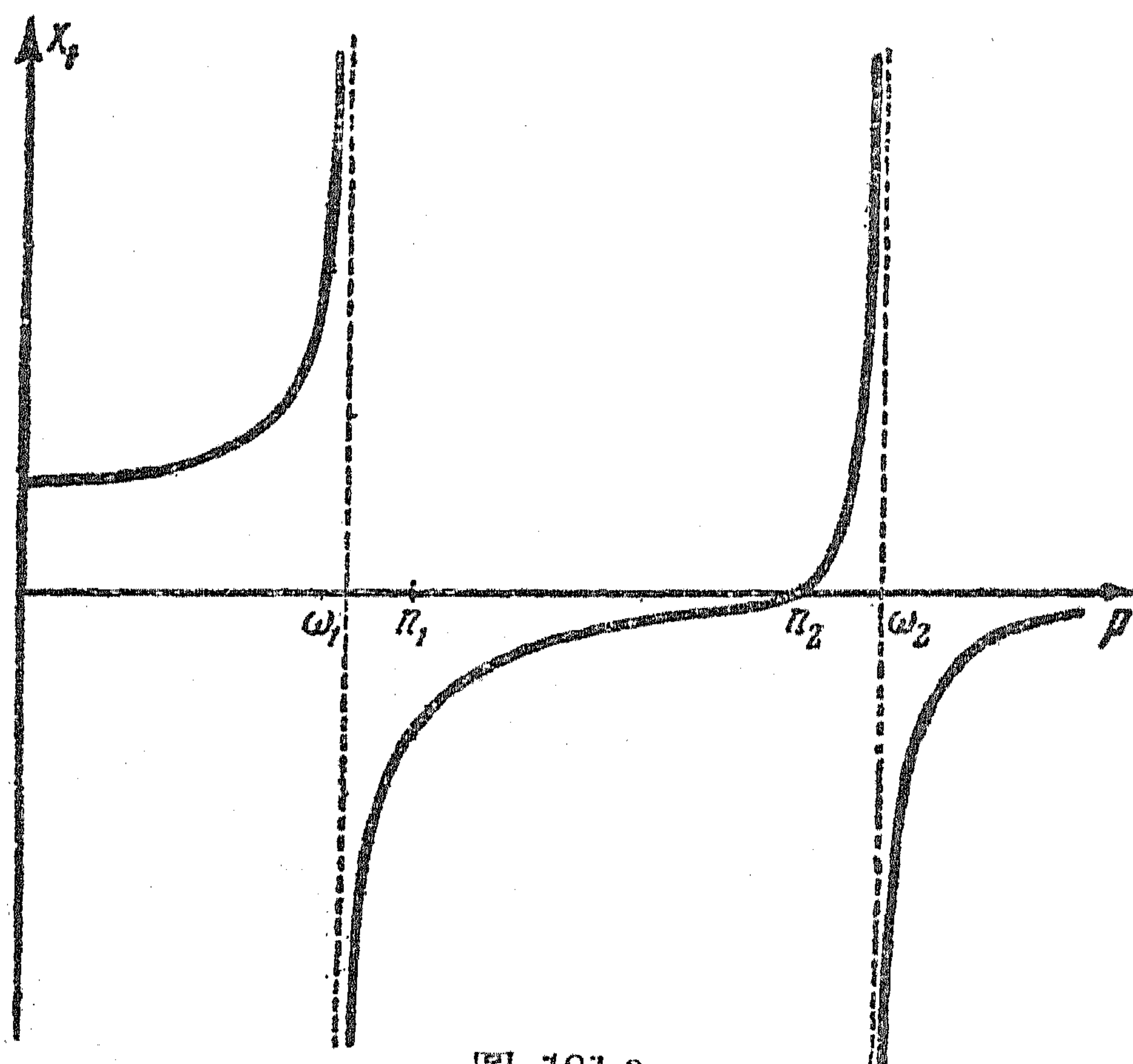


圖 181 a.

进一步研究圖 181 a 时，可以看出，当 $n_2<p<\omega_2$ 时，振动与外力同相位。而当 $p\to\omega_2$ 时，振动增加到無穷大。此后，当 $p>\omega_2$ 时，振动与外力反相位，振动振幅則單調地減小到零。

根据公式(66.8)可以看出第二个坐标的振动，振幅 X_2 的依存

关系如圖 181 б 所示[1]。要注意到：假如系統采取彈性耦合和慣性耦合，那末，便会有这种頻率，这时 X_2 变为零，也就是：

$$p^2=\frac{\alpha_{12}}{\beta_{12}}。$$

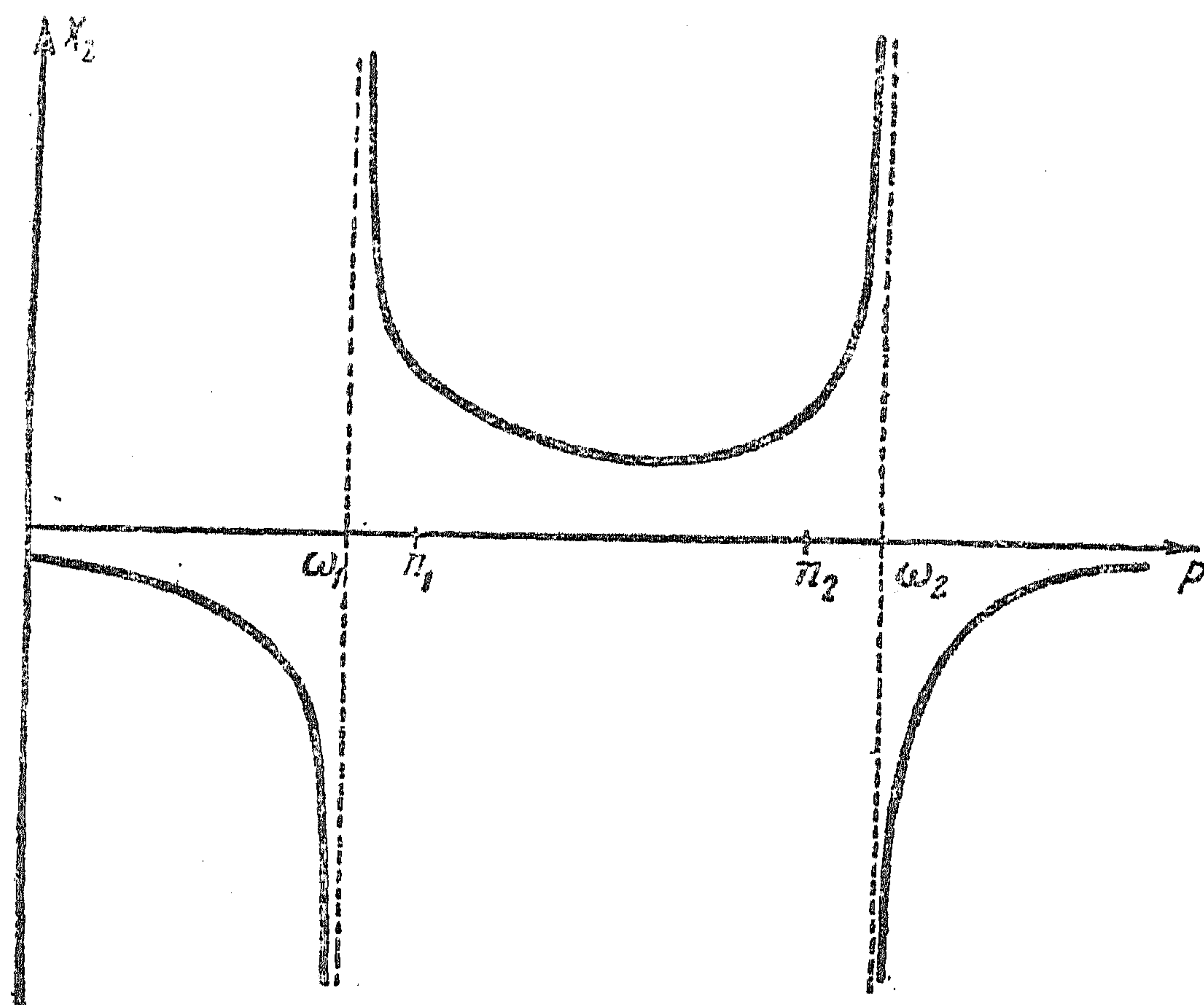


圖　181 б.

如果只有彈性（电容）耦合，即 $\alpha_{12}\neq0$, $\beta_{12}=0$, 或者只有慣性（电感）耦合，即 $\alpha_{12}=0$, $\beta_{12}\neq0$, 那末，無論外力的頻率是什么值，都不能使 X_2 变为零。在共振时（$p=\omega_1$, $p=\omega_2$），第二个系統中的振动具有無穷大的振幅，而在所有其他的頻率时，振动具有有限的振幅。在彈性耦合的情况下，对于低頻率說，即当 $p<n_2$ 时，(66.9) 中的受迫振动振幅的比值 k_p 是負值，兩个坐标的振动反相位，对于高頻率（$p>n_2$）而言，k_p 是正值，兩个坐标的振动同相位。在慣性耦合的情况下，不同坐标的振动間的相位关系，与彈性耦合情况下的相位关系相反：在低頻时，振动同相位，余类推。

現在我們列举几种最簡單的濾波器和阻尼器的原理圖，它們是根据具兩个自由度的系統中受迫振动的原理制作出来的。在圖

① 系統間采取彈性耦合时的依存关系。

182 上繪的是一种电阻抗濾波器的綫路。

假如外电动势 $\mathscr{E}=\mathscr{E}_0\cos pt$ 的頻率等于串联在电路中的第二个迴路的固有頻率，即 $p=\frac{1}{\sqrt{L_2C_2}}$，那末，在基本电路$(L_1, C_1)$中的电流，便等于零。我們还可以制作像圖 183 上所示的那种阻抗濾波器。

在这种情形下，如果外加电动势的頻率 $p=\frac{1}{\sqrt{L_2C_2}}$，那末，在基本电路中的电流等于零。

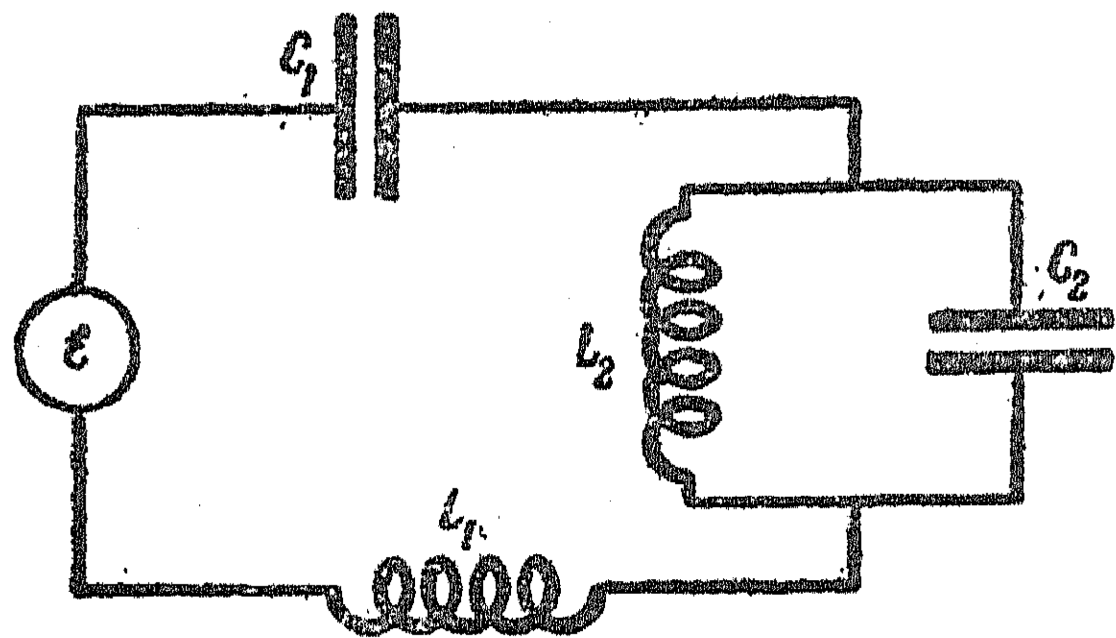


圖 182.

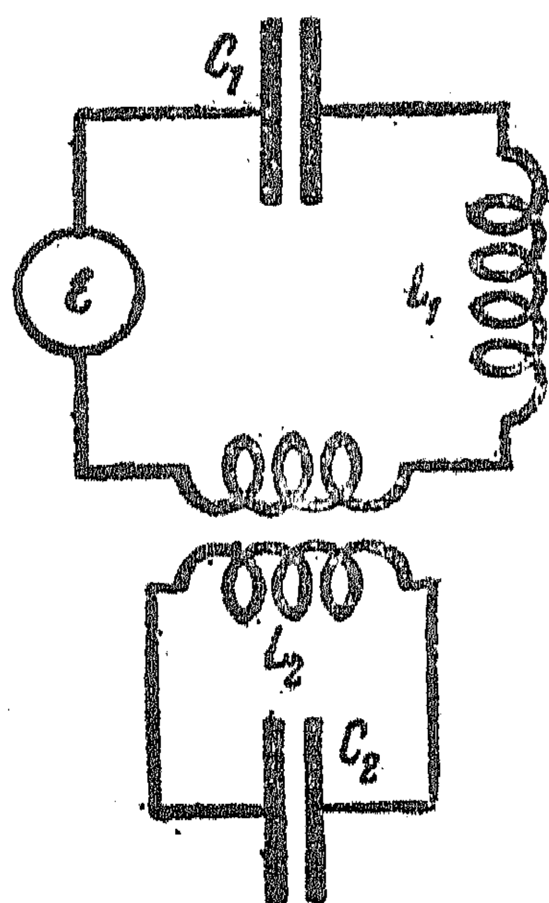


圖 183.

圖 182 的濾波器代表第一編中我們已經知道的阻抗共振（或者"电流共振"）的情形。由此可見，阻抗共振就是具兩个自由度的系統中受迫振动的情形。

在物理上，濾波器作用的根据在于：由于有耦合的緣故，在第二个迴路中产生的固有振动，会在基本迴路中引起某个电动势，这电动势与外电动势的大小相等，方向相反。因为系統中沒有阻尼，所以不需要能量来維持振动。假如像实际情形那样，在第二个迴路中存在着阻尼，那末，被引起的电动势便不能完全抵消外电动势，从而在基本电路中会有微小的电流。不待說，这一电流比沒有濾波器时的电流要小得多。

机械結構的动态阻尼器的構造原理，簡要地表示在圖 184 上。

設有一周期性的外力 $F_0 \cos pt$ 作用于質量 m_1 上，这一外力会引起質量 m_1 的振动，現在要消除这种振动。为此，在質量 m_1 下面，用彈簧悬挂一个質量 m_2（有时它十分小），这彈簧的剛度是 k_2。質量 m_2 和彈簧的剛度 k_2 的値要这样选擇，使得

$$p^2=\frac{k_2}{m_2},$$

就用这种方式可以消除質量 m_1 的不愜意的振动。

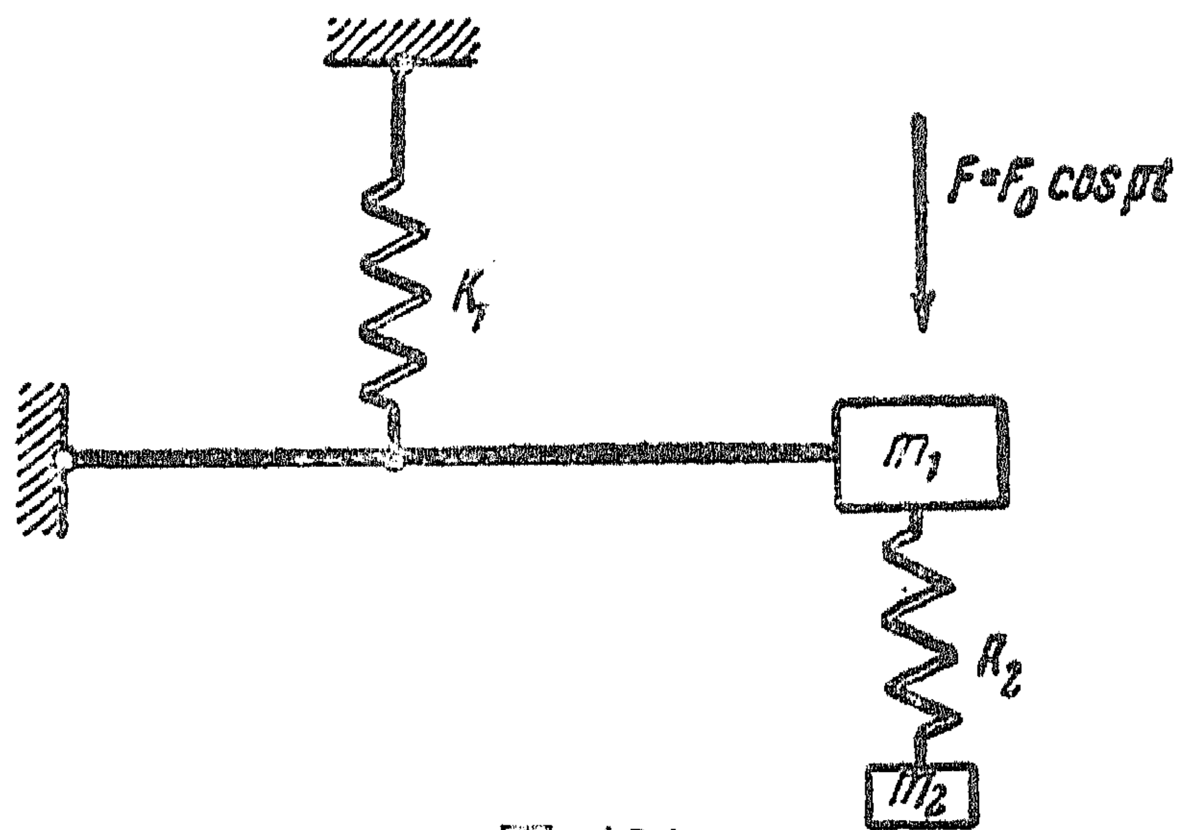


圖 184.

在实际中，例如，某一机器以一定的轉速旋轉，这个机器軸的軸承就是基本系統。由于轉子微小的不平衡，会使軸承作不能容忍的振动。在軸承上加一动态阻尼器，就可以大大地削弱这种振动。这样的阻尼器仅仅适用于削弱一定頻率的振动，或者頻率不大随时間变化的振动。

§67. 具兩个自由度的系統当有阻尼时的受迫振动

由于系統中总不免有摩擦，所以当振动时，总会有能量变为热而損失。这損失会使我們前一节里研究的受迫振动的情况有所改变。在这种情况下，如果用 §64 中的表示符号时，則振动方程式可以写为下列形式：

$$\begin{aligned}\beta_{11}\ddot{x}_1+\beta_{12}\ddot{x}_2+\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\varepsilon_{11}\dot{x}_1+\varepsilon_{12}\dot{x}_2&=F_1\cos pt,\\ \beta_{12}\ddot{x}_1+\beta_{22}\ddot{x}_2+\alpha_{12}x_1+\alpha_{22}x_2+\varepsilon_{12}\dot{x}_1+\varepsilon_{22}\dot{x}_2&=F_2\cos pt.\end{aligned}\tag{67.1}$$

利用这些方程式，便不难把关于坐标 x_1 和 x_2 的复数振幅的一般形式的表达式写出来。为使分析簡單起見，我們写出一种特殊情形的复数振幅，这一特殊情形是：$F_2=0$, $\beta_{12}=0$ 和 $\varepsilon_{12}=0$, 也就是，外

力只作用于彈性耦合的系統中的一个系統，而且，由于有摩擦力，耦合不能实現。在这种情况下，

$$\bar{X}_1=F_1\frac{\alpha_{22}-p^2\beta_{22}+ip\varepsilon_{22}}{\bar{D}},$$
$$\bar{X}_2=-\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}-p^2\beta_{22}+ip\varepsilon_{22}}\bar{X}_1=\bar{k}_p\bar{X}_1, \tag{67.2}$$

其中

$$\bar{D}=(\alpha_{11}-p^2\beta_{11}+ip\varepsilon_{11})(\alpha_{22}-p^2\beta_{22}+ip\varepsilon_{22})-\alpha_{12}^2.$$

显然，当阻尼不大时，ε_{11} 和 ε_{22} 的值都很小，除了共振附近的微小頻率区域以外，振动振幅都差不多和無阻尼情况下的振幅(66.8)相同，在共振附近的頻率区域内，根据(66.4)，$\bar{D}$ 的实数値与 D 差不多相等，并接近于零。振动振幅 X_1 与頻率的依存关系，大致如圖 185 所示，圖上虛綫表示同一系統在無阻尼情况下的振动振幅。增加阻尼会使"共振巔値"移动和变得平緩。

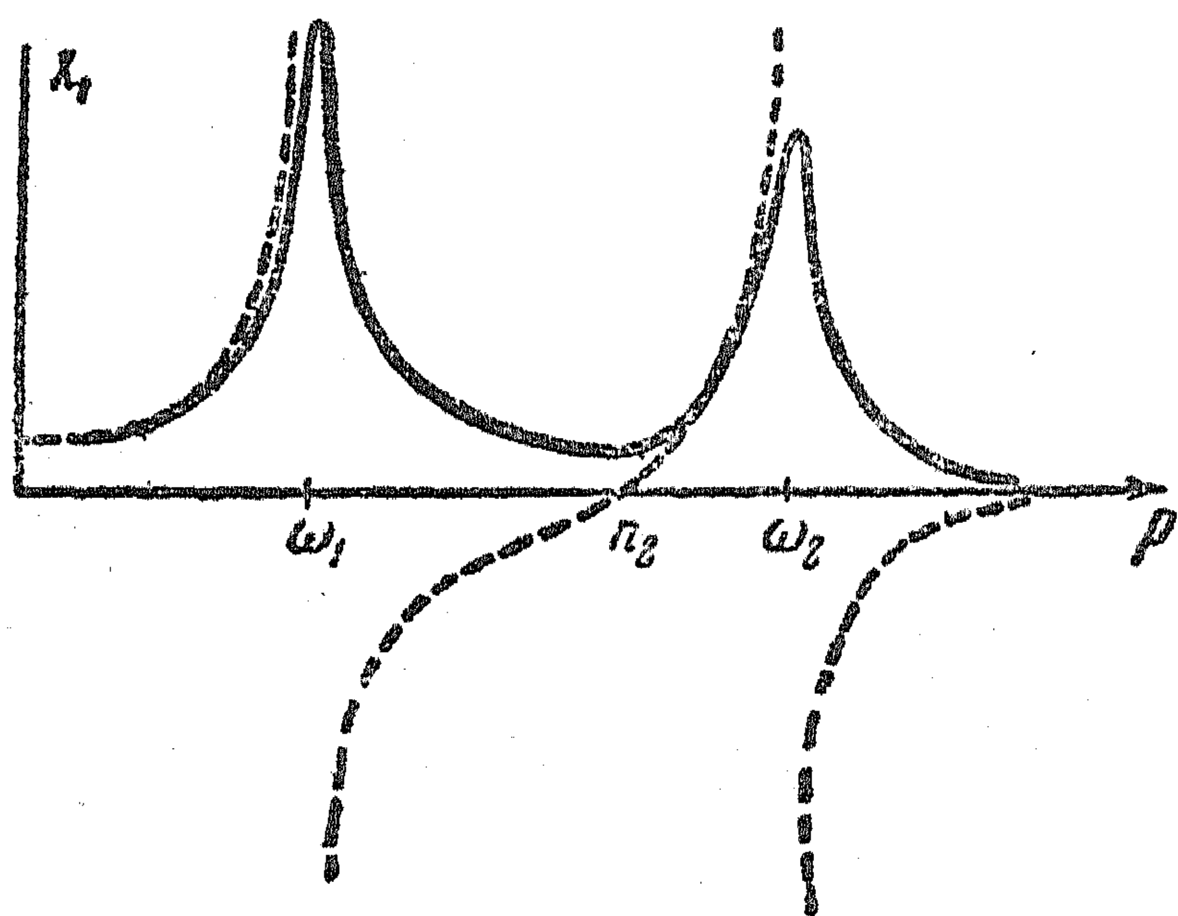


圖 185.

正如在前一节中曾經指出的，当只有一个力激励的情况下，在共振时，受迫振动振幅的比値，和同一頻率的固有振动振幅的比値是一样的。由(67.2)中可以看出，就是当阻尼不大时，在共振时的振幅比値 $\bar{k}_p$ 也会接近于固有振动时的振幅比値(58.12)。由于测量受迫振动比测量固有振动要簡單得多，研究固有振动时，常常利用这种情况：在小阻尼情况下，不同坐标的受迫振动的振幅比値，差不多等于固有振动的振幅比値。假如外力仅仅作用于第一个坐标上 ($F_2=0$)，由(67.2)可以看出，在确定固有振动的振幅比値时，阻尼对于它的准确度的影响是比較小的，我們便可以求出关于第

一个頻率 ω_1 的振幅的比値。这是因为当 $p=\omega_1$ 时，在分母中的 $\alpha_{22}-p^2\beta_{22}$ 的値并不小，于是，由代表摩擦的一項 $ip\varepsilon_{22}$ 所产生的影响，会比当 $p=\omega_2$ 时所产生的影响小得多。为了比較准确地确定关于第二个頻率 ω_2 的固有振动的振幅比値，应該令外力作用于第二个坐标上($F_1=0$)。

換句話說，这就表示：在外力作用于第一个坐标的情形下，当共振时，振幅的比値仅仅由耦合以及第二个坐标的参数来决定。其实，假如已給定了第一个坐标的振动振幅，那末，連第二个坐标的振动振幅也仅仅决定于耦合和第二个坐标的参数。当發生共振的頻率接近于受外力作用的那一坐标的部分頻率时，第二个坐标的彈力与慣性力之間的差相当大，因而摩擦力便不产生重大的影响；当共振發生在第二个頻率时，則由于在这种情形下，第二个坐标的彈力与慣性力的差要小得多，所以摩擦力所起的作用就显著些。

要計算具兩个自由度的系統在有阻尼情况下的受迫振动，用复数参数和标准圖形来計算，最为簡單。

任何具兩个自由度的机械系統，总可以化为如圖 186 所示的标准圖形。設有兩个元件 A 和 B，坐标分别为 x_1 及 x_2，受着兩个外力作用，这兩个力的复数振幅分别等于 $\overline{F}_1$ 和 $\overline{F}_2$。这兩个元件被支持在三个环节上，三个环节各具有动剛度 $\overline{K}_1$, $\overline{K}_2$ 和 $\overline{K}_3$，并如圖 186 所示的那样連接起来。我們假定所有的位移都沿同一个方向發生，例如沿竖直的方向發生，而且当形变时，元件 A 和 B 可以上升或下降，但升、降时 A 和 B 都与其原来的方向平行。

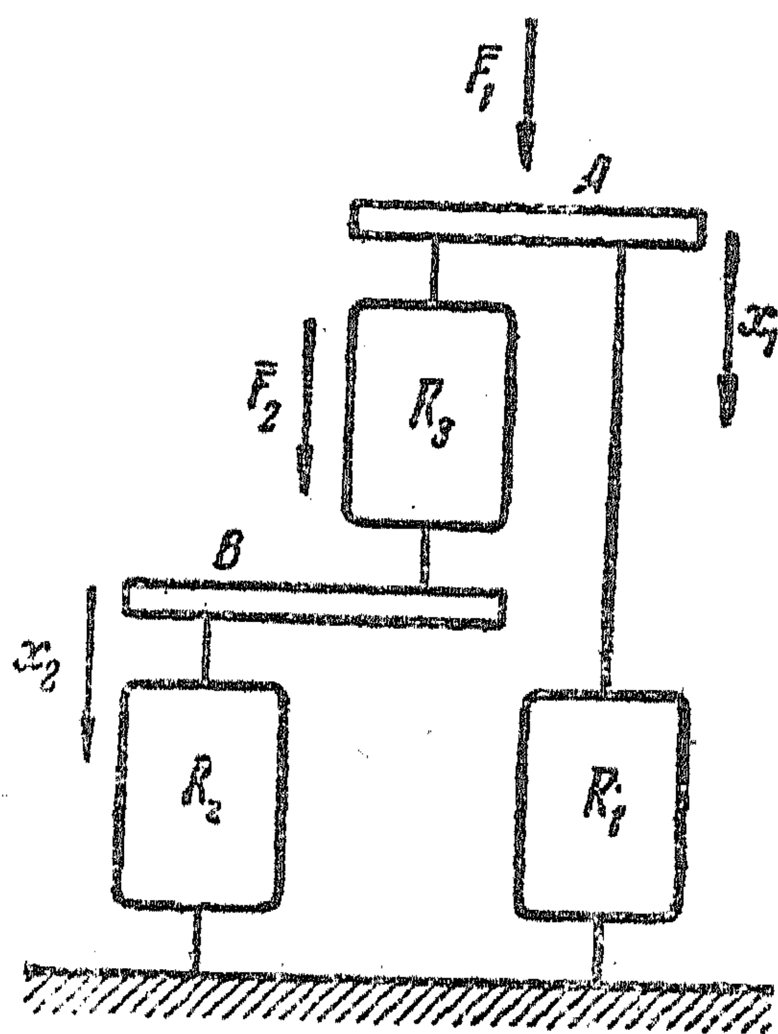


圖 186.

具剛度 $\overline{K}_3$ 的元件代表耦合元件。还可以引用部分动剛度，它

是当另一坐标的元件固定不动时、某一坐标的元件的刚度。

因此，令 $\bar{K}_{x_1}$ 为坐标 x_1 的部分动刚度，这 $\bar{K}_{x_1}$ 等于系統在 $x_2=0$ 时的动刚度，或者

$$\bar{F}_1=\bar{K}_{x_1}\bar{X}_1. \tag{67.3}$$

由圖中可以看出，当 $x_2=0$ 时

$$\bar{F}_1=(\bar{K}_1+\bar{K}_3)\bar{X}_1;$$

將上式与(67.3)加以比較时，可得坐标 x_1 的部分动刚度

$$\bar{K}_{x_1}=\bar{K}_1+\bar{K}_3. \tag{67.4}$$

按完全同样的方法，可求得坐标 x_2 的部分动刚度

$$\bar{K}_{x_2}=\bar{K}_2+\bar{K}_3. \tag{67.5}$$

假如有兩个力作用于系統上，这兩力的复数振幅各等于 $\bar{F}_1$ 和 $\bar{F}_2$，那末，可以由下列关于每个坐标的力的等式中：

$$\text{关于 } x_1 \text{ 的：} \bar{F}_1=\bar{K}_1\bar{X}_1+\bar{K}_3(\bar{X}_1-\bar{X}_2),$$

$$\text{关于 } x_2 \text{ 的：} \bar{F}_2=\bar{K}_2\bar{X}_2-\bar{K}_3(\bar{X}_1-\bar{X}_2),$$

求得一組方程式，它表明着力的振幅以及系統（圖 186）元件的动刚度与位移的复数振幅 $\bar{X}_1$ 以及 $\bar{X}_2$ 之間的关系。假如引用(67.4)和（67.5）的部分刚度时，那末，这組方程式便具有十分簡單的形式：

$$\bar{F}_1=\bar{K}_{x_1}\bar{X}_1-\bar{K}_3\bar{X}_2,$$

$$\bar{F}_2=-\bar{K}_3\bar{X}_1+\bar{K}_{x_2}\bar{X}_2.$$

这种形式的方程式是不难記住的；它的解写起来也很簡單：

$$\bar{X}_1=\frac{\bar{F}_1\bar{K}_{x_2}+\bar{F}_2\bar{K}_3}{\bar{K}_{x_1}\bar{K}_{x_2}-\bar{K}_3^2},\quad \bar{X}_2=\frac{\bar{F}_1\bar{K}_3+\bar{F}_2\bar{K}_{x_1}}{\bar{K}_{x_1}\bar{K}_{x_2}-\bar{K}_3^2}. \tag{67.6}$$

要記得 $\bar{K}_3$ 是耦合元件的动刚度，因此，通过 $\bar{K}_3$，某一坐标的振动振幅依存于作用于另一坐标上的力。

繪一个具体机械圖的等效标准圖形（圖 186），是非常簡易的，我們用下面一个例子来說明这一点。假定有一个具兩个自由度的

复杂机械系統，如圖 187 所示。这系統含有兩个質量 m_1 和 m_2，我們將兩个質量的位移分别取作坐标 x_1 和 x_2。質量 m_1 由具有剛度 k_1 和摩擦系数 h_1 的彈簧来耦合。質量 m_2 系由具有剛度 k_2 的彈簧来耦合的，此外，还有一个摩擦力作用于这一質量上，其摩擦系数等于 h_2。連在兩質量之間的彈簧具有剛度 k_3 和摩擦系数 h_3。

現在来确定关于坐标 x_1 的部分剛度，为此，令 $x_2=0$，也就是在質量 m_2 固定不动的情况下，来决定系統的动剛度。这个动剛度等于

$$\overline{K}_{x_1}=\overline{K}_1+\overline{K}_3=k_1-m_1p^2+ih_1p+k_3+ih_3p. \tag{67.7}$$

用完全同样的方法，还可以确定 K_{x_2}:

$$\overline{K}_{x_2}=\overline{K}_2+\overline{K}_3=k_2-m_2p^2+ih_2p+k_3+ih_3p. \tag{67.8}$$

將(67.7)和(67.8)加以比較时，可以看出

$$\begin{aligned}\overline{K}_1&=k_1-m_1p^2+ih_1p,\\ \overline{K}_2&=k_2-m_2p^2+ih_2p,\\ \overline{K}_3&=k_3+ih_3p.\end{aligned} \tag{67.9}$$

將(67.9)代入一般公式(67.6)，当力的复数振幅已給定时，便不难求出圖 187 所示系統的位移的复数振幅。

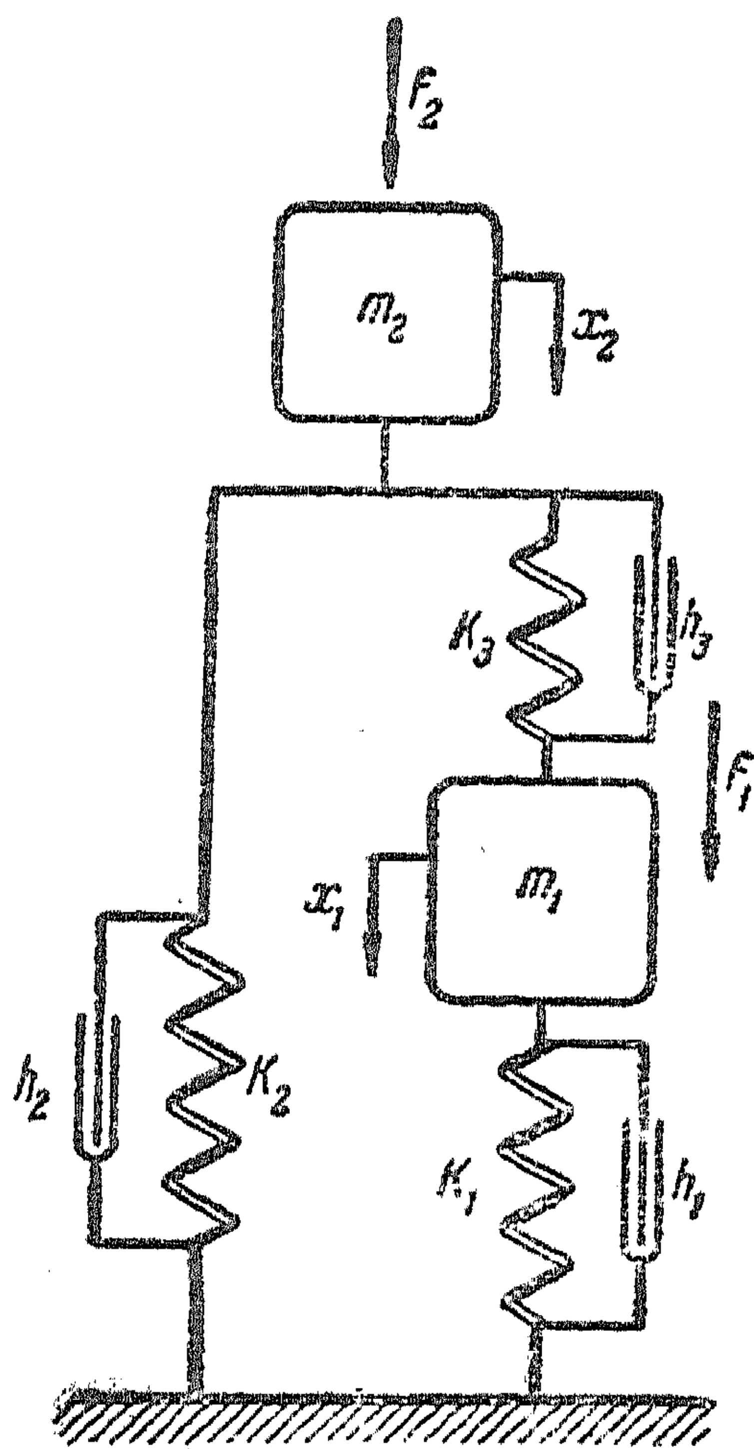


圖 187.

对兩个耦合的电迴路而言，总可以繪出如圖 188 所示的标准綫路，这綫路中包含兩个迴路，并有复数振幅为 $\overline{\mathscr{E}_1}$ 和 $\overline{\mathscr{E}_2}$ 的外电动势分别作用于迴路中；$\overline{Z}_1$, $\overline{Z}_2$ 和 $\overline{Z}_3$ 是各个支路的复数阻抗。如果用 $\overline{I}_1$ 和 $\overline{I}_2$ 代表电流的复数振幅，那末，用复数振幅所表出的迴路的电压方程式可以写为：

$$\begin{aligned}\overline{\mathscr{E}_1}&=\overline{I}_1\overline{Z}_1+(\overline{I}_1-\overline{I}_2)\overline{Z}_3=\overline{I}_1\overline{Z}_{\mathrm{I}}-\overline{I}_2\overline{Z}_3,\\ \overline{\mathscr{E}_2}&=\overline{I}_2\overline{Z}_2-(\overline{I}_1-\overline{I}_2)\overline{Z}_3=\overline{I}_2\overline{Z}_{\mathrm{II}}-\overline{I}_1\overline{Z}_3,\end{aligned} \tag{67.10}$$

和前面講的相似，在这里，

$$\bar{Z}_{\rm I}=\bar{Z}_1+\bar{Z}_3,\quad \bar{Z}_{\rm II}=\bar{Z}_2+\bar{Z}_3 \tag{67.11}$$

代表部分电路的复数阻抗，假如知道电路的标准綫路以及支路的复数阻抗 $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2$ 和 $\bar{Z}_3$，当給定了电动势的振幅时，便不难由公式(67.10)求出电流的复数振幅；当給定了电流的复数振幅时，也不难由公式(67.10)求出电动势的振幅。

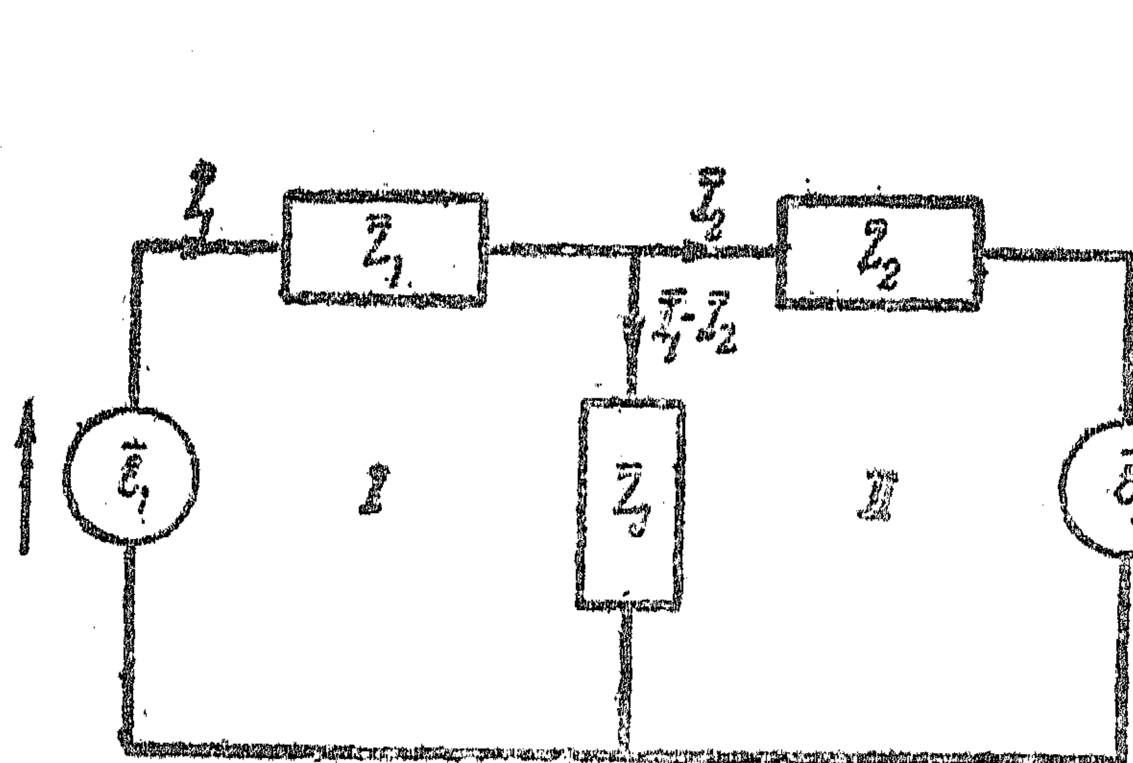


圖 188.

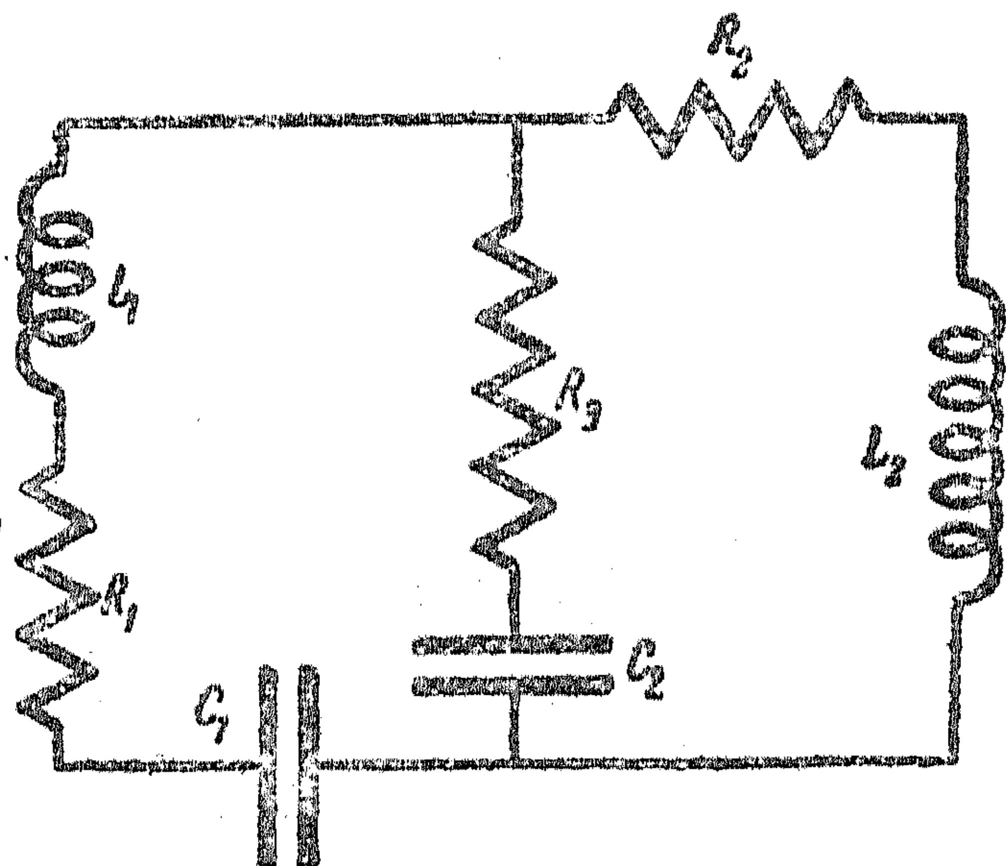


圖 189.

繪制标准路綫，即繪制圖 188，通常不会有什么困难，例如在圖 189 表出的这种电路的情况下，

$$\bar{Z}_1=R_1+i\left(pL_1-\frac{1}{pC_1}\right),$$

$$\bar{Z}_2=R_2+ipL_2,$$

$$\bar{Z}_3=R_3+\frac{1}{ipC_3}.$$

当电路可以分为三个独立的支路时，跟这种情形一样，繪制标准綫路也是很簡便的。对于电感耦合的迴路（圖 190）而言，繪制标准綫路有时会發生一些困难，这是因为在这里無法指出三个独立的支路。显然，

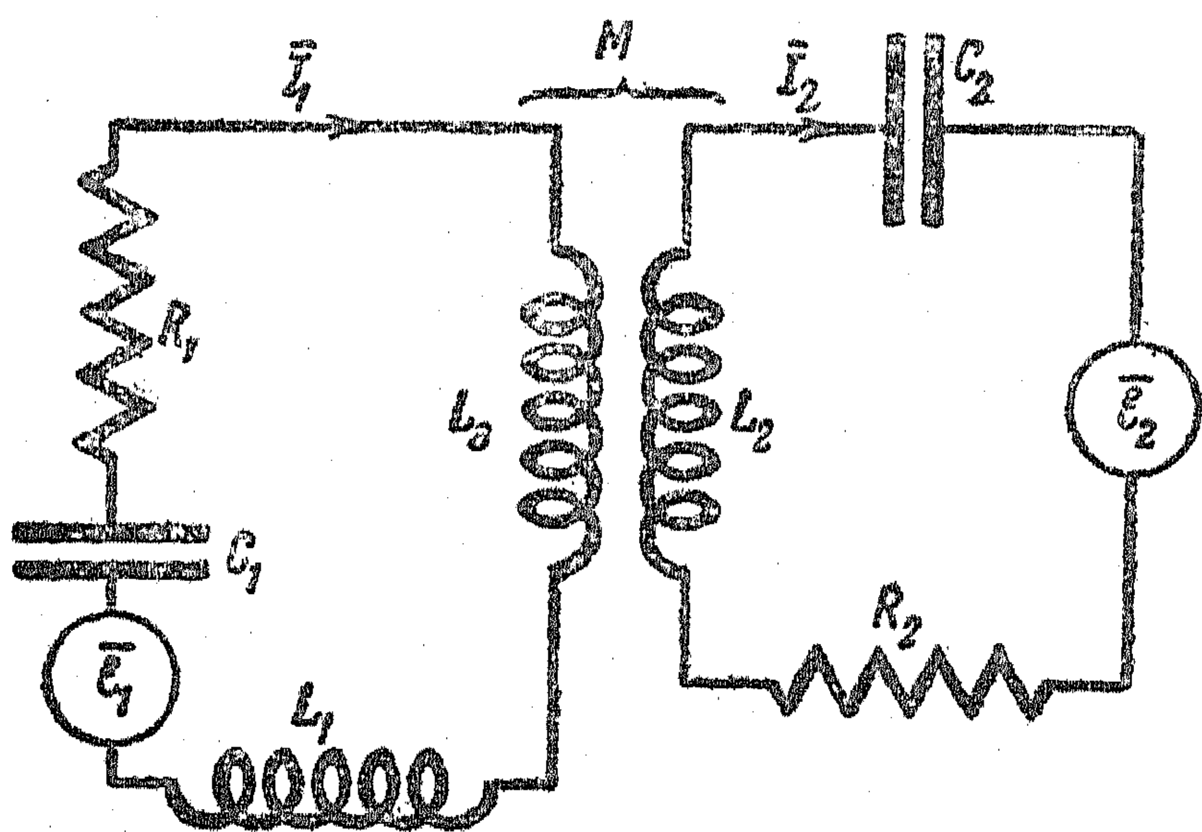


圖 190.

$$\begin{aligned}\bar{Z}_{\rm I}&=\bar{Z}_1+\bar{Z}_3=R_1+i\left[\,p(L_1+L_3)-\frac{1}{pC_1}\right],\\ \bar{Z}_{\rm II}&=\bar{Z}_2+\bar{Z}_3=R_2+i\left[\,pL_2-\frac{1}{pC_2}\right].\end{aligned}\tag{67.12}$$

而这些迴路的电压方程式为:

$$\begin{aligned}\overline{\mathscr{E}_1}&=\bar{I}_1\left\{R_1+i\left[\,p(L_1+L_3)-\frac{1}{pC_1}\right]\right\}+ipM\bar{I}_2,\\ \overline{\mathscr{E}_2}&=\bar{I}_2\left[R_2+i\left(pL_2-\frac{1}{pC_2}\right)\right]+ipM\bar{I}_1.\end{aligned}\tag{67.13}$$

將(67.12)和(67.13)兩式跟方程組(67.10)比較,便得到:

$$\bar{Z}_3=-ipM.$$

將上式代入(67.12),我們求得:

$$\bar{Z}_1=R_1+i\left[\,p(L_1+L_3)-\frac{1}{pC_1}\right]+ipM,$$

$$\bar{Z}_2=R_2+i\left(\,pL_2-\frac{1}{pC_2}\right)+ipM.$$

§68. 系統的复数参数

假如只有一个外力作用于系統上,那末,宜于引用由系統的某一点所确定的动剛度的概念。例如在圖 186 所示的系統中,有一諧外力作用于坐标x_1上,力的复数振幅等于$\bar{F}_1$,那末,根据(67.6),

$$\bar{X}_1=\frac{\bar{K}_{x2}}{\bar{K}_{x2}\bar{K}_{x1}-\bar{K}_3^2}\bar{F}_1,\ \ \bar{X}_2=\frac{\bar{K}_3}{\bar{K}_{x2}\bar{K}_{x1}-\bar{K}_3^2}\bar{F}_1.\tag{68.1}$$

位移的复数振幅与力的复数振幅成正比,因此,可以引用关于系統的新复数参数。

在坐标为x_1的点的系統的动剛度可以这样来定义:

$$\bar{K}_{11}=\frac{\bar{K}_{x2}\bar{K}_{x1}-\bar{K}_3^2}{\bar{K}_{x2}};\tag{68.2}$$

它是一个复数参数,表明着力的复数振幅和着力点的位移之間的关系。

由 x_1 到 x_2 的系統的累接动剛度

$$\overline{K}_{12}=\frac{\overline{K}_{x_2}\overline{K}_{x_1}-\overline{K}_3^2}{\overline{K}_3} \tag{68.3}$$

联系着坐标 x_2 振动的复数振幅，坐标 x_2 的振动是由作用于坐标 x_1 上的諧力引起的。

現在可將公式(68.1)写为：

$$\overline{F}_1=\overline{K}_{11}\overline{X}_1,\quad \overline{F}_1=\overline{K}_{12}\overline{X}_2. \tag{68.4}$$

用完全同样的方法，可以定义

$$\overline{K}_{22}=\frac{\overline{K}_{x_1}\overline{K}_{x_2}-\overline{K}_3^2}{\overline{K}_{x_1}},\ \overline{K}_{21}=\frac{\overline{K}_{x_2}\overline{K}_{x_1}-\overline{K}_3^2}{\overline{K}_3}。 \tag{68.5}$$

显然，$\overline{K}_{21}=\overline{K}_{12}$，也就是說，兩个坐标的累接动剛度是相同的。这是互易原理在机械系統中的推論。

現在可以用下列形式的对称矩陣来表出系統的总动剛度：

$$\overline{K}=\begin{Vmatrix}\overline{K}_{11} & \overline{K}_{12}\\ \overline{K}_{21} & \overline{K}_{22}\end{Vmatrix} \tag{68.6}$$

可以用矩陣的方法来进行关于受迫振动的振幅的全部計算，但是这超出了本課程的范圍。然而，应該注意，从受迫振动观点看，在表达式(68.6)中已提供了系統振动性質的全部物理特征。

对于电路(圖 189)說，用完全一样的推理，也可以在第一个支路开断的兩端，引用整个电路的复数阻抗。

假如將电路(圖 191)在 A 点断开，并注意到(67.11)，就可求得电路的总复数阻抗等于

$$\overline{Z}_A=\frac{\overline{Z}_1\overline{Z}_2-\overline{Z}_3^2}{\overline{Z}_1}. \tag{68.7}$$

$\overline{Z}_A$ 所确定的，是接在 A 点断开处的电动势的复数振幅、跟这个电动势所引起的流过电源的电流的复数振幅間的关系。

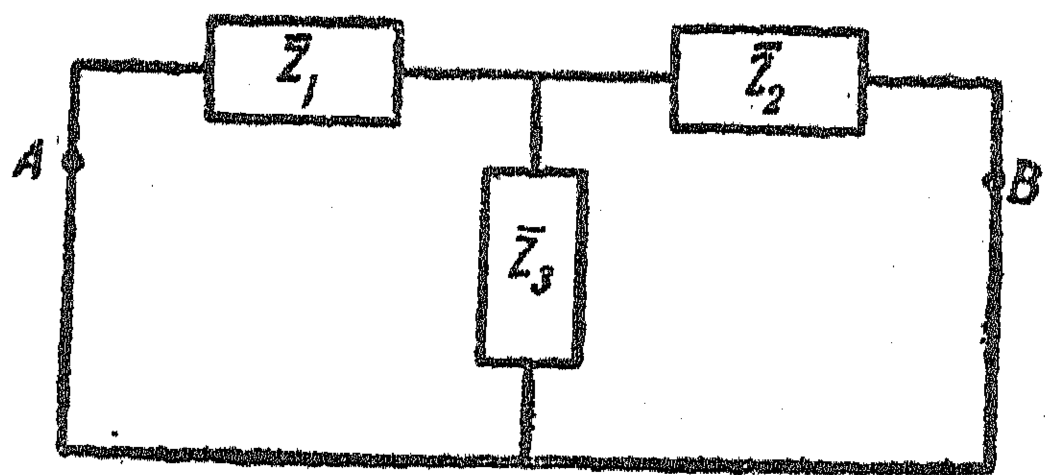


圖 191.

仿照(68.3)式的累接剛度，可引用累接复数阻抗

$$\bar{Z}_{AB}=\frac{\bar{Z}_1\bar{Z}_2-\bar{Z}_3^2}{\bar{Z}_3},\qquad(68.8)$$

$\bar{Z}_{AB}$ 所确定的，是在点 A 的电动势跟流过第二个支路（例如在点 B）的电流間的关系。繼續这同样的推理，便可以断言，复杂电路（圖 191）的复数阻抗是由下列矩陣来代表的：

$$Z=\begin{Vmatrix}\bar{Z}_A & \bar{Z}_{AB}\\ \bar{Z}_{BA} & \bar{Z}_B\end{Vmatrix},\qquad(68.9)$$

其中 $\bar{Z}_{AB}=\bar{Z}_{BA}$。

一切关于受迫振动和耦合迴路中的問題，都可以用一些簡單的公式来解出，例如用下列公式：

$$\overline{\mathscr{E}_A}=\overline{I_A Z_A},\quad \overline{\mathscr{E}_A}=\overline{I_B Z_{AB}},\ 等等.$$

§69. 关于系統的共振頻率的概述

在前几节中已經講过，在理想化的無阻尼系統中，共振——無穷大的振幅——發生在外力頻率与系統的固有頻率剛好符合的时候。阻尼的出現，一般說来，会使得受迫振动在外力頻率与系統的固有頻率大致符合的时候，就發生振幅的最大値。在这种情形下，要确定某一坐标所表出的任何物理量（位移，速度，加速度）的振动振幅出現最大値时的頻率，是一个相当复杂的問題。同时，各坐标所表出的不同量出現最大値时的頻率也是不一样大的，这一点，由分析公式(67.2)可以看出。因此，在有阻尼的情况下，假如說整个系統的共振在某一頻率一起出現，那便沒有意义。不过，当阻尼不大时，却可以近似地認为共振在整个系統中發生，在共振的时候，兩个坐标的振动振幅，实际上都接近于最大値。

利用系統的复数参数（动剛度，复数阻抗），可以說明第一个迴路中电流振幅 I_A 的共振頻率，在这种頻率时，

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{Z_A}\right)=0,\quad \frac{\partial^2}{\partial p^2}\left(\frac{1}{Z_A}\right)<0,\qquad(69.1)$$

复数阻抗的模量的倒数为最大値。严格說来，这是关于系統第一个迴路中电流振幅的共振頻率的准确定义。当阻尼不大时，可以大致上認为这一頻率是具兩个迴路的系統的共振頻率，这一頻率实际上与 ω_1 以及 ω_2 很相近，即与同一系統的在無阻尼情况下的固有頻率很相近。

在解实际問題时，人們有时又提出其他的近似方法用来确定系統的共振頻率。例如認为当（某个电路的）复数阻抗是实数（或者动剛度是純虛数）时的頻率是共振頻率。在阻尼不大时，这样确定的共振頻率，一般都与固有頻率很相近，但却不会与固有頻率符合。关于这一点，可由具兩个自由度的机械系統的例子中得到証实，这种系統中的振动是由公式(67.2)表出的。

对于一个迴路而言也是一样；我們在前面研究过，在外力（电动势）的振幅保持恒定而变更頻率的情况下的共振依存关系（圖185），除了这种依存关系以外，在实际中常常利用其他形式的共振依存关系，它是由这种方式求得的：令外力的頻率和振幅保持常数，并連續变化系統的某个参数，在这种情况下来測量振动的振幅。

在包含兩个电迴路的系統中，可以由改变外加振蕩器頻率的方法，来求得共振曲綫。进行这种測量的仪器的接綫圖，如圖 192 所示。这时，我們改变振蕩器的頻率，同时測量电流振幅 I，共振的依存关系大致如圖 185 所示的形式，也就是說，共振曲綫在靠近共振頻率 ω_1 和 ω_2 的地方，有兩个最大値，在 n_2 附近有一个最小値。

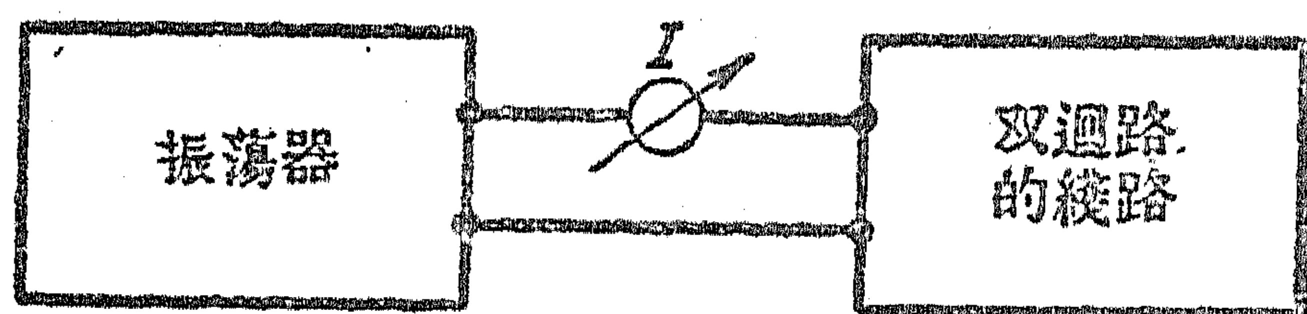


圖 192.

然而，当外电动势的振幅和頻率保持不变，而变更系統的某个参数（变更电容器的电容，或者变更綫圈的电感）时，也可以將兩个

迴路的系統調諧到共振，并得到共振曲綫。在这种情形下的共振曲綫，例如电流的振幅作为电容的函数的共振曲綫，具有完全另外一种形式。假如系統有一个固有頻率和外电动势的頻率相等，那末，便会發生共振。可是共振曲綫的形狀和圖 185 的形狀并不相像。

假定有一根这样的共振曲綫，它是由改变迴路中的某一个电容器的电容得到的，或者在一般情形下，它是由改变一个迴路的部分頻率得到的。要理解这种共振曲綫的特点，値得研究一下在形式上大致如圖 172 所示的固有頻率的圖綫。在这里（圖 193），沿橫坐标軸列出部分頻率的平方 n_2^2，沿縱坐标軸列出固有頻率的平方 ω_1^2 和 ω_2^2。后者是用粗的实綫曲綫表出的。

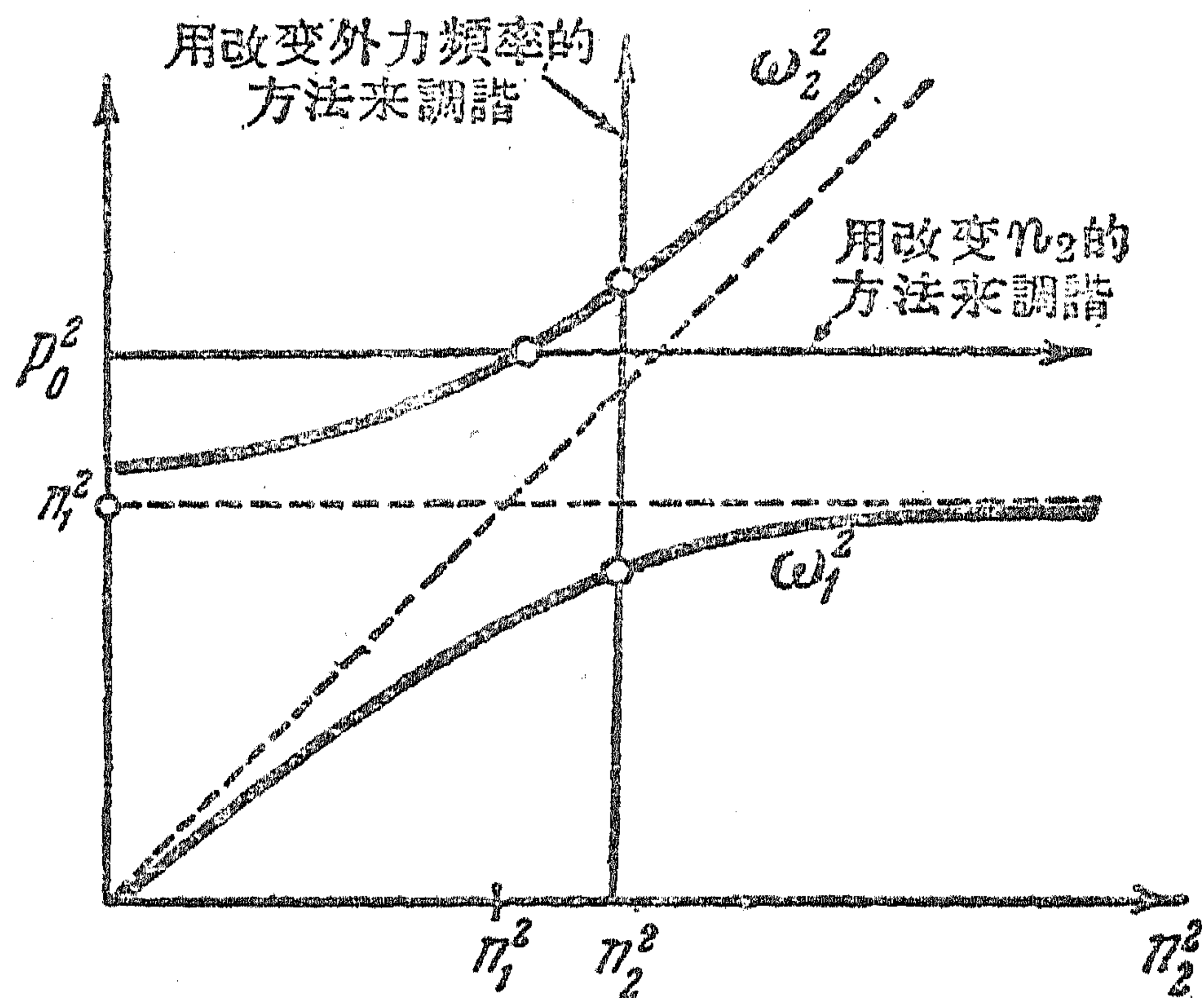


圖 193.

系統的不变部分頻率的平方 n_1^2 标明在兩个坐标軸上。当系統的参数（n_1 和 n_2）不变，而用改变外电动势頻率的方法来調諧时，我們沿竪直方向与圖 193 的圖形相截，显然当外电动势的頻率为某兩个値时，假如在系統中沒有阻尼，那末，会出現無穷大的振幅，会發生共振；当阻尼不大时，也会有十分强烈的共振振动。如果外电动势的頻率 p_0 保持不变，而用改变部分頻率 n_2 的方法来进行調諧，仅仅在頻率 n_2 为某一个确定的値时，会出現無穷大的振幅——共振。有阻尼时，共振曲綫仅仅有一个最大値，这最大値相等于在直綫 p_0^2 和曲綫 ω_2^2 交点附近的某一点，这种共振曲綫和圖 185 所示的曲綫比較起来，

具有根本不同的特点，它类似于一个迴路的共振曲綫。

假如研究关于振动振幅的表达式(67.2)，在改变一个参数时，例如改变 α_{11}(或 α_{22})时，便会得到同样的結論。在这种情形下，在無阻尼的系統中，显然分母 D 仅仅在参数为某一値时才等于零。

§70. 超外差中的中頻濾波器的計算

現在来研究由兩个电感耦合迴路所組成的中頻濾波器，作为具兩个自由度系統中受迫振动的一个例子。中頻放大器所用的电子管通常是五極管，迴路系統則接在該管的板極电路中，例如如圖 194 所示。

由于五極管的內电阻十分大，于是，当給定了加于該管控制柵極上的諸电压时，可以認为板流已經完全确定，因此，在进行計算时，板流的复数振幅（卽 $\bar{I}_a$）是一个給定値。在电容器 C_2 上的电压的复数振幅为 $\bar{U}$，这一电压加在下一級电子管的柵極上，因此，当 $\bar{I}_a$ 为某个値时，我們把 $\bar{U}$ 作为頻率 p 的函数来进行研究。

关于迴路电流的复数振幅 $\bar{I}_1$ 和 $\bar{I}_2$ 的方程式具有下列形式：

$$\begin{aligned} &\bar{I}_1(R_1+ipL_1)+(\bar{I}_1-\bar{I}_a)\frac{1}{ipC_1}+\bar{I}_2 ipM=0, \\ &\bar{I}_1 ipM+\bar{I}_2\left[R_2+i\left(pL_2-\frac{1}{pC_2}\right)\right]=0. \end{aligned} \tag{70.1}$$

用符号 $\bar{Z}_1=R_1+i\left(pL_1-\frac{1}{pC_1}\right)$ 和 $\bar{Z}_2=R_2+i\left(pL_2-\frac{1}{pC_2}\right)$ 来代表第一和第二迴路的复数阻抗。

于是(70.1)便可以写为：

$$\begin{aligned} &\bar{I}_1\bar{Z}_1+\bar{I}_2 ipM=\frac{1}{ipC_2}\bar{I}_a, \\ &\bar{I}_2\bar{Z}_2+\bar{I}_1 ipM=0. \end{aligned} \tag{70.2}$$

輸出电压的振幅 $\bar{U}=\frac{\bar{I}_2}{ipC_2}$，因此，由(70.2)中消去 I_1，便得到：

$$\frac{\bar{U}}{\bar{I}_a}=\frac{iM}{pC_2^2(\bar{Z}_1\bar{Z}_2+p^2M^2)}. \qquad (70.3)$$

公式(70.3)中的$\left|\frac{\bar{U}}{\bar{I}_a}\right|$和 p 的依存关系提供了所求的濾波器特性。

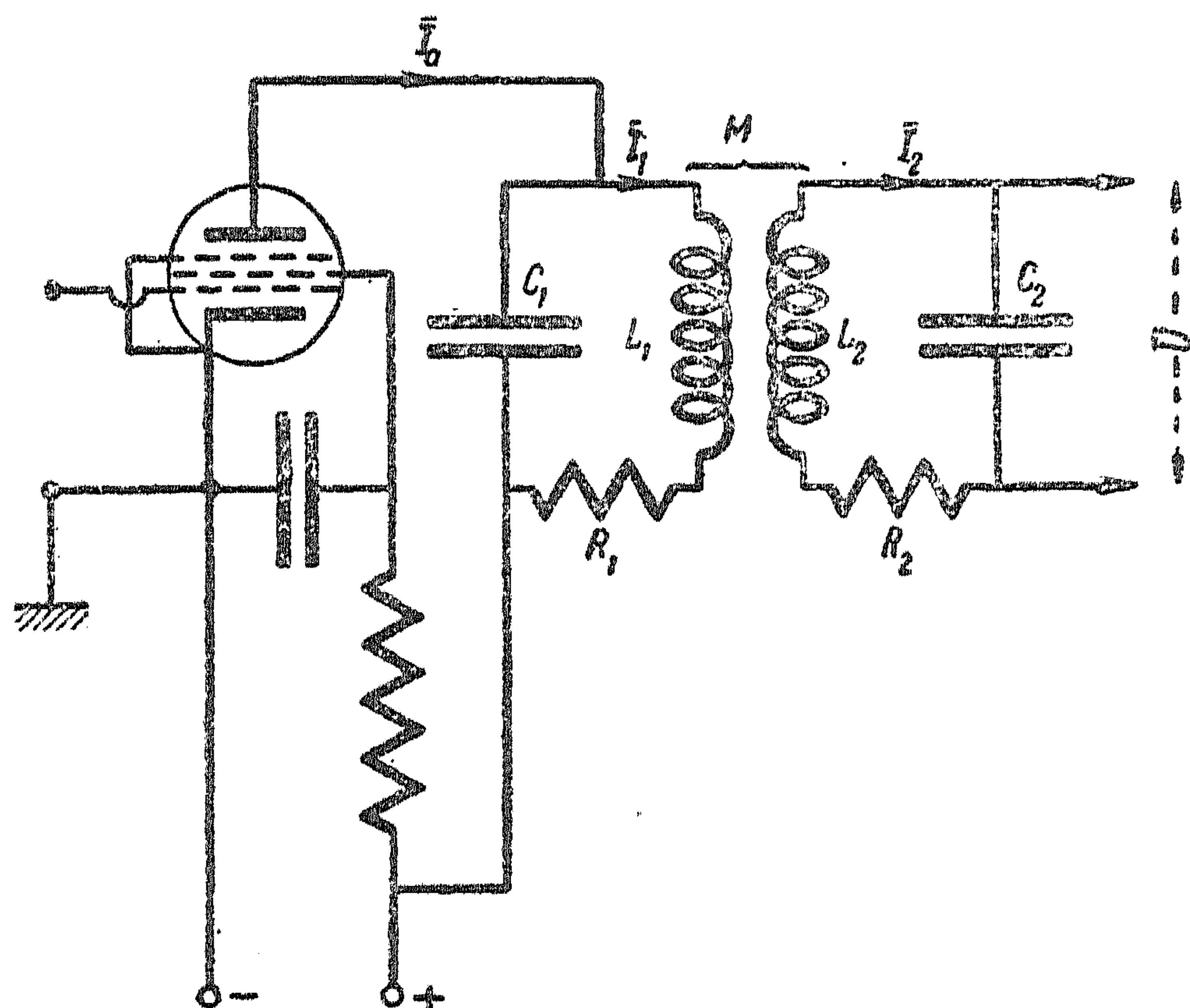


圖 194.

讓我們看看，在这种情况下，当兩个迴路相同时，濾波器的特性將怎样依存于迴路間的耦合，这时，$L_1=L_2=L$，$C_1=C_2=C$，$R_1=R_2=R$，

$$n^2=\frac{1}{LC},\ \bar{Z}_1=\bar{Z}_2,\quad Q=\frac{Ln}{R},$$

再用符号 $\gamma_1=M/L$，便可以將(70.3)改写为下列形式：

$$\frac{\bar{U}}{\bar{I}_a}=i\frac{L}{CR}\,\frac{n\gamma_1Q}{p\left\{\left[1+iQ\left(\frac{p}{n}-\frac{n}{p}\right)\right]^2+\gamma_1^2Q^2\left(\frac{p}{n}\right)^2\right\}} \qquad (70.4)$$

我們記得，L/CR 代表并联迴路的等效共振阻抗。

假定耦合値 γ_1 不同，迴路的品質因数也不同，現在打算把比値$|U/\bar{I}_a|$作为 p/n 的函数来研究一下。首先看看，当迴路准确調諧到共振时，$|\bar{U}/\bar{I}_a|$怎样地依存于耦合和品質因数。当 $p=n$ 时，公式(70.4)具有下列形式：

$$\frac{\bar{U}}{\bar{I}_a}=i\frac{L}{CR}\,\frac{\gamma_1Q}{1+(\gamma_1Q)^2}. \qquad (70.5)$$

由这里看出，在共振时，振幅依存于 γ_1Q 的値。公式(70.5)中的無因次系数跟 γ_1Q 的依存关系如圖 195 所示。因此，对于当 $\gamma_1Q=$

$=1$ 时的共振頻率說，在濾波器的輸出端会出現振动振幅的最大値。$\gamma_{\text{кр}}=1/Q$ 的耦合称为临界耦合。假如选好某一个确定的 Q 値，例如 $Q=50$，并且改变 γ_1，那末，对耦合临界値附近的一些不同的 $\gamma_1 Q$ 値，各作一根共振曲綫，所得到的共振曲綫的形狀十分不同。当 $\gamma_1>\gamma_{\text{кр}}$ 时，共振曲綫有兩个最大値；当 $\gamma_1<\gamma_{\text{кр}}$ 时，在 $p=n$ 这一点，共振曲綫有一个最大値。共振曲綫的形狀大致如圖 196 所示。

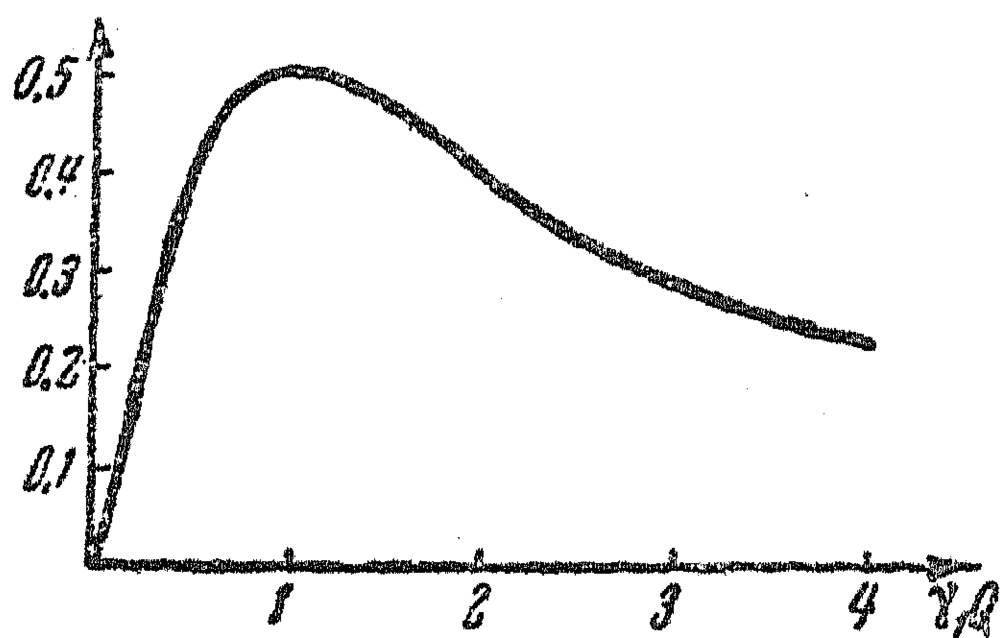


圖 195.

由这个圖中的曲綫看出，当耦合比临界耦合稍大一点时，或者 $\gamma_1 Q$ 比 1 稍大一点时，在这种情形下，濾波器可以分离出相当寬的頻帶。

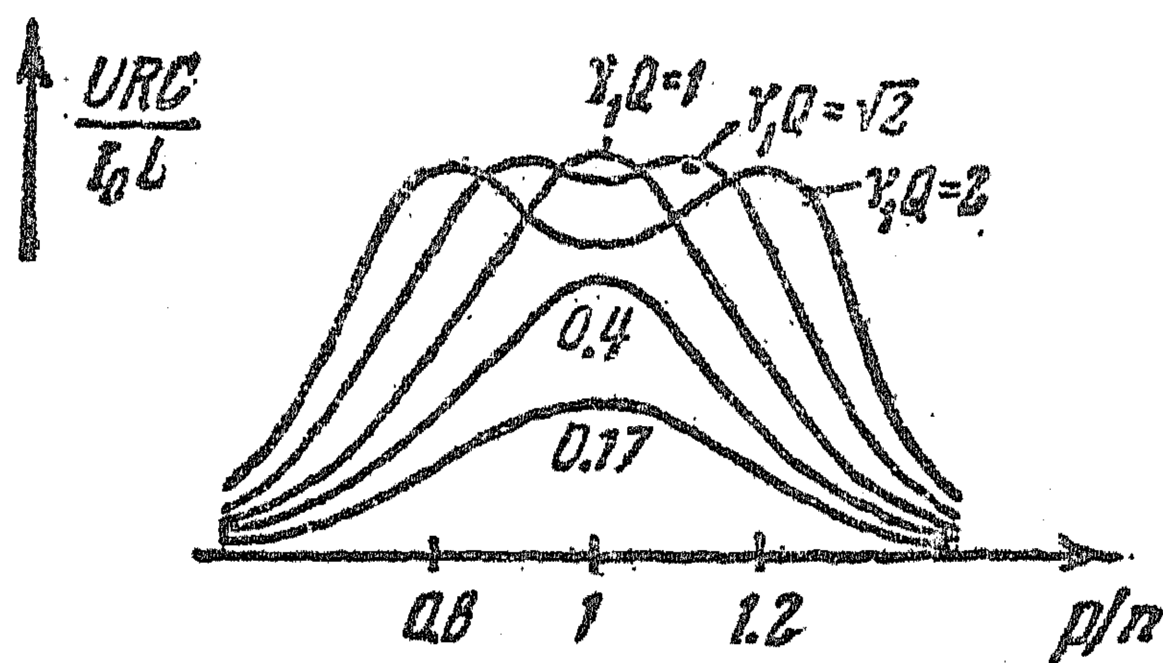


圖 196.

研究这一例子，就可知道：等耦合小的时候，迴路中的阻尼完全"消灭"了系統的共振特性。在第一个迴路中，外来的作用激励着受迫振动，这一振动又被傳送到第二个迴路中。由于这时相互作用的电动势很小，从而第二个迴路几乎对第一个迴路中的振动沒有什么影响。还可以这样来解释它：当耦合不大时，系統的兩个固有頻率彼此很接近，而阻尼使兩个最大値都变得很平緩，以致它們会重合起来。当耦合增加得大于临界値时，系統的兩个固有頻率离得如此远，以致尽管有阻尼的平緩作用，每个固有頻率附近的最大値仍旧被分开来，在这种情况下的耦合电动势是足够大的，第二迴路在第一迴路中所引起的电动势大大地影响第一迴路中的振动。

第二章　具多个自由度的綫性系統中的振动

§71. 具多个自由度的綫性振动系統的一般性質

由一些耦合起来的摆所組成的振动系統（圖 197），或是由許多迴路所組成的电路（圖 198），都是具有多个自由度的系統的实例。

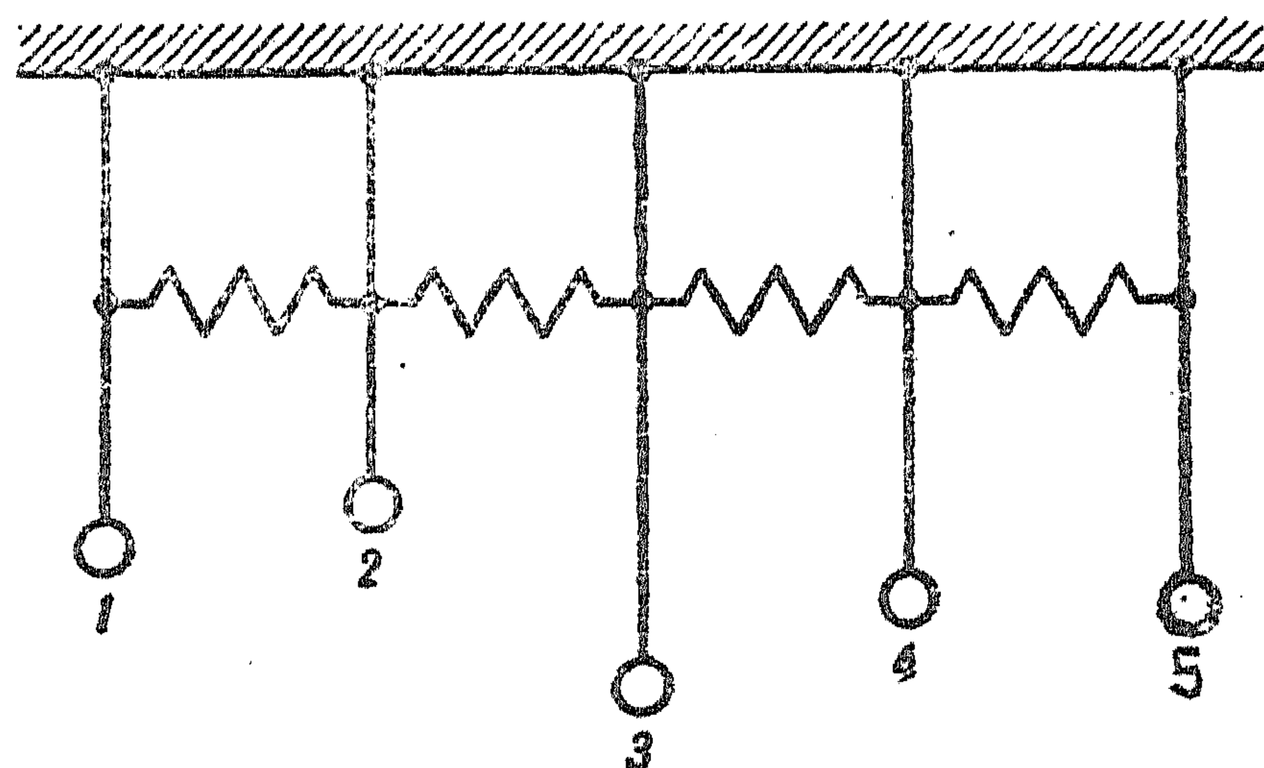


圖 197.

系統的某一环节所發生的振动，一定会引起其余环节中的振动。当利用独立坐标来描述系統中所有的运动时，独立坐标的数目就是自由度的数目。例如：对于由一些摆所組成的系統(圖 197)来說，如果所考虑的仅仅是摆在圖紙平面內的运动，那么，它就是一个具有五个自由度的系統；就圖 198 中所表明的电气系統来說，它也具有五个自由度。坐标是可以用各式各样的方式来选择的。例如：在机械系統中，可以把每个摆的歧离取作坐标，同时，也可把某个摆的偏角和所有彈簧的長度取作坐标等等；在电气系統中（圖198），可以把电路中某些点的电流取作坐标，这些点已經用短

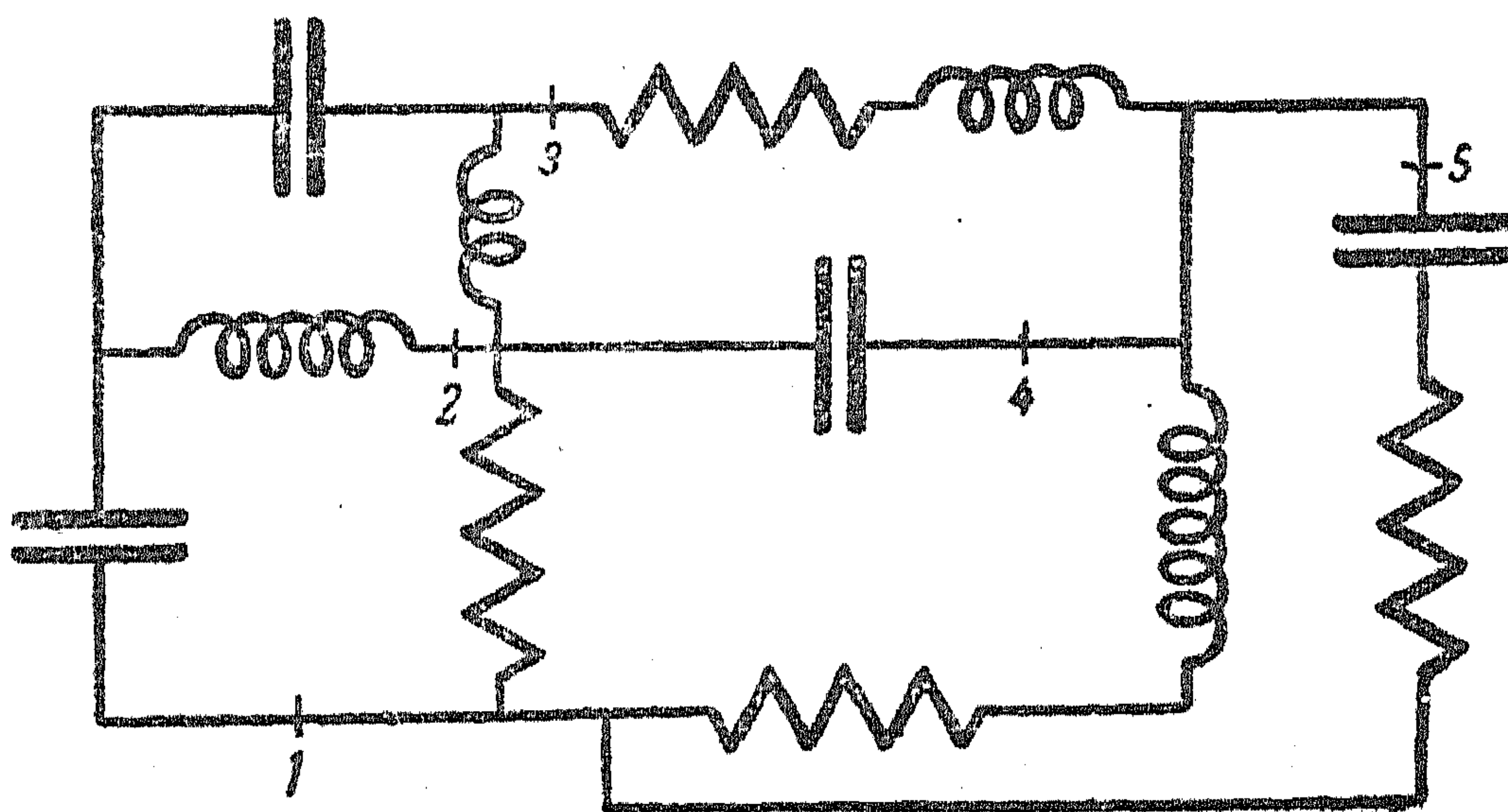


圖 198.

綫标明在各个支路上。关于所选擇坐标的充分性和正确性，是可以用"固定法"来檢驗的，例如：如果把所有的坐标"固定起来"，保持不变，或是把取作基本坐标的电流所流过的一切支路都"断开"，那末，在系統中，便不可能有任何运动。

我們往后只研究綫性系統，也就是可以用綫性微分方程式来描述运动的那种系統，这就表示：在运动規律中，只含有各个坐标、速度以及加速度各乘以某些常系数所得的和，而不会有这些量的乘积和冪次項。或者这样說，在运动的規律中，彈力与坐标的变化成正比，摩擦力与坐标的速度成正比，而質量則保持不变。

我們用拉格朗日的广义方程来建立系統中的运动（振动）方程式，因此，現在来考虑系統的能量表达式。

位能（或静电能）是系統的坐标的函数，設在系統中的运动是由 n 个独立广义坐标

$$q_1, q_2, \cdots, q_n \tag{71.1}$$

来确定的，在特殊情形中，(71.1)中的坐标代表某些点的位移，或是代表某些导体上的电荷。令位能为

$$U(q_1, q_2, \cdots, q_n) \text{ 或 } U(q). \tag{71.2}$$

大家知道，在系統的稳定平衡位置，位能具有最小值。在平衡位置，彈力等于零，或是

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_s}\right)_{q_{s0}}=0, \tag{71.3}$$

s 的值由 1 取到 n，在上式中，q_{s0} 是平衡位置的坐标值。当坐标变化时，位能的变化就是系統的彈力在这种变化时所作的功，若用 $x_s=q_s-q_{s0}$ 来表示系統的坐标相对于平衡位置的变化，那末，在平衡位置时，所有的 $x_s=0$。当 x_s 的值微小时，可以写成：

$$U(q_s)-U(q_{s0})=$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial q_s}\right)_{q_{s0}}\cdot x_s+\sum_{s,l=1}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_s\partial q_l}\right)_{q_{s0},\, q_{l0}}\cdot x_s x_l+\cdots. \tag{71.4}$$

因为重要的只是位能的变化，所以，总可以令 $U(q_{s0})=0$，也就是，位能的值从平衡位置的位能算起。如果考虑到(71.3)，那末，任何系統在平衡位置附近的位能表达式便可以写成：

$$U(q_s)=\sum_{s,l=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_s \partial q_l}\right)_{q_{s0},\,q_{l0}}\cdot x_s x_l+\cdots. \tag{71.5}$$

或者，引用符号：

$$\alpha_{sl}=\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_s \partial q_l}\right)_{q_{s0},\,q_{l0}} \tag{71.6}$$

同时，略去比 $x_s x_l$ 更高次的項，(71.5)便可以写成下列形式：

$$U(x_s,\,x_l)=\sum_{s,l=1}^{n}\alpha_{sl}x_s x_l. \tag{71.7}$$

我們要記住，在(71.7)中，求和的符号是对兩个脚标而言的，正如人們常常說的"二重和"。

我們要研究的是系統在稳定平衡位置附近的振动，因此，位能的值总是正的，或者

$$U(x_s,\,x_l)>0. \tag{71.8}$$

还要注意到，由(71.6)中推得：

$$\alpha_{sl}=\alpha_{ls}. \tag{71.9}$$

系統的动能或磁能具有这样的形式：

$$T=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}m_s\dot{y}_s^2,\quad \text{或是}\quad T=\frac{1}{2}\sum_{s,l=1}^{n}L_{sl}I_sI_l, \tag{71.10}$$

这里 m_s 是速度为 $\dot{y}_s$ 的点的質量。对于电气系統来說，L_{sl} 是电流为 I_s 和 I_l 的兩个支路之間的互感系数，而 L_{ss} 是电流为 I_s 的支路的感应系数。

假設用下列形式的綫性变换①

① 可以不限于綫性变换；对于微小振动来說，作任意变换时，我們也可以得到同样的結論；不过，在作綫性变换的这种情形下，公式(71.11)对于任何(不仅是微小的)振动都是适用的。

$$y_s=\sum_{l=1}^{n}\gamma_{sl}x_l.$$

將普通坐标 y_s 变换为广义坐标 x_s, 那末,

$$\dot{y}_s=\sum_{l=1}^{n}\gamma_{sl}\dot{x}_l,$$

而动能

$$T=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}m_s\dot{y}_s^2=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}m_s\sum_{l,p=1}^{n}\gamma_{sl}\gamma_{sp}\dot{x}_l\dot{x}_p=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{l,p=1}^{n}\dot{x}_l\dot{x}_p\sum_{s=1}^{n}m_s\gamma_{sl}\gamma_{sp}=\sum_{l,p=1}^{n}\beta_{lp}\dot{x}_l\dot{x}_p. \qquad (71.11)$$

这里,引用了符号:

$$\beta_{lp}=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}m_s\gamma_{sl}\gamma_{sp}. \qquad (71.12)$$

由(71.12)推得:

$$\beta_{sl}=\beta_{ls}. \qquad (71.13)$$

动能(或磁能)(71.10)总是正値。

因此可以説,当綫性系統在稳定平衡位置附近發生运动时,动能是速度的正的二次齐次型(71.11),而位能是坐标的正的二次齐次型(71.7)。

摩擦力(或是电阻上的电压降)也可以用某个速度的特殊函数来表征。可是,在無摩擦力的 n 个自由度的系統中,也和通常一样,开始总是研究固有振动,所以,我們等一下再引入这个函数。

§72. 無摩擦力的系統中的固有振动

假定我們已經知道系統的参数,也就是知道所有在(71.11)中的系数 β_{sl} 和(71.7)中的系数 α_{sl},那末,借拉格朗日方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_s}+\frac{\partial U}{\partial x_s}=0 \tag{72.1}$$

就可以写出系統在平衡位置附近的运动方程式。將动能表达式(71.11)和位能表达式(71.7)代入(72.7)，我們得到 n 个微分方程式

$$\sum_{s=1}^{n}(\beta_{sl}\ddot{x}_s+\alpha_{sl}x_s)=0, \tag{72.2}$$

l 的値由 1 取到 n，这是 n 个坐标的綫性微分方程組。它的解就代表系統的固有振动。

可以求出(72.2)的解如下：

$$x_s=A_s e^{\lambda t}, \tag{72.3}$$

这里 A_s 和 λ 都是常数。將(72.3)代入(72.2)，我們就得到关于 A_s 的齐次方程組：

$$\sum_{s=1}^{n}(\beta_{sl}\lambda^2+\alpha_{sl})A_s=0, \tag{72.4}$$

$l=1, 2, 3, \cdots, n$。

仅仅当齐次方程組(72.4)的系数行列式等于零时，或是

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}+\beta_{11}\lambda^2 & \cdots\cdots\cdots\cdots & \alpha_{n1}+\beta_{n1}\lambda^2 \\ \alpha_{12}+\beta_{12}\lambda^2 & \alpha_{22}+\beta_{22}\lambda^2\cdots & \alpha_{n2}+\beta_{n2}\lambda^2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \alpha_{1n}+\beta_{1n}\lambda^2 & \cdots\cdots\cdots\cdots & \alpha_{nn}+\beta_{nn}\lambda^2 \end{vmatrix}=0. \tag{72.5}$$

这一方程組才有关于 A_s 的非零解。

不难証明，这个关于 λ^2 的 n 次方程式所有的根都是負的。

其实，我們在(72.4)中取一方程式，假定是第 l 个方程式，并把它写为：

$$\lambda^2\sum_{s=1}^{n}\beta_{sl}A_s+\sum_{s=1}^{n}\alpha_{sl}A_s=0,$$

將上式乘以 A_l，

$$\lambda^2 A_l \sum_{s=1}^{n} \beta_{sl} A_s + A_l \sum_{s=1}^{n} \alpha_{sl} A_s = 0.$$

我們对方程組(72.4)中的每一个方程式都进行这样的运算，然后，將他們全部加起来，結果是：

$$\lambda^2 \sum_{s,l=1}^{n} \beta_{sl} A_s A_l + \sum_{s,l=1}^{n} \alpha_{sl} A_s A_l = 0. \qquad (72.6)$$

考虑到位能和动能的表达式，(72.6)就可以改写为：

$$\lambda^2 = -\frac{U(A_s, A_l)}{T(A_s, A_l)}.$$

因为由动能和位能的物理意义知道，对于 A_s 和 A_l 的任何值，都有 $T(A_s, A_l)>0$，以及 $U(A_s, A_l)>0$，所以 λ^2 总是一个負数。要記得，动能 T 总是一个正数，但是，对位能 U 来說，如果在平衡位置 $U=0$，那末，仅仅在稳定平衡位置附近，位能 U 才是正的。因此，在不稳定平衡位置附近，λ^2 的值可能是正的。

一般地說，方程式(72.5)有 n 个不同的 λ^2 的值：$\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2 \cdots$，因为这些数都是負的，那末，就可以將它們表为

$$\lambda_s = \pm i\omega_s,$$

这里 ω_s 是实数。因此，方程式(72.5)就有 $2n$ 个成对的共軛根，所以，方程組的特解具有下列形式：

$$x_s = \bar{A}_s e^{i\omega_s t} + \bar{A}_s^* e^{-i\omega_s t}, \quad s = 1, 2, \cdots n, \qquad (72.7)$$

这里 $\bar{A}_s^*$ 是 $\bar{A}_s$ 的共軛复数。显然（72.7）中的每一式都是頻率为 ω_s 的諧振动。

因此，方程組(72.7)的通解是由 n 个頻率为

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots, \omega_n \qquad (72.8)$$

的諧振动的和所組成的，所以頻率(72.8)是系統的固有頻率，而方程式(72.5)是确定固有頻率的方程式，或者簡称为"頻率方程式"。

对于每一个固有頻率 ω_s 而言，如果將它的值代入(72.4)，我們就得到一个确定量 A_s 的方程組。由于对于每个 ω_p 的值，都有一个屬于它的方程組，那末，我們使用兩个脚标来表示量 A_s，这样一来，A_{sp} 的第一个脚标是表示坐标的号碼，而第二个脚标是表示固

有頻率的号碼。关于 A_{sp} 的方程組便具有下列形式:

$$\sum_{s=1}^{n}(\alpha_{sl}-\omega_p^2\beta_{sl})\bar{A}_{sp}=0. \qquad (72.9)$$

$l=1, 2, 3\cdots n$。

对于固有頻率的每一个号碼 p，都存在一个方程組(72.9)，因此，总有 n 个方程組来确定 $\bar{A}_{sp}$。

在每一个关于頻率 ω_p 的方程組(72.9)中，含有 n 个未知数:

$$\bar{A}_{1p}, \bar{A}_{2p}, \bar{A}_{3p}, \cdots, \bar{A}_{np}. \qquad (72.10)$$

但是由于方程組(72.9)是一个 n 个齐次方程式的方程組，因此，这个方程組只能确定所有的 A_{sp} 与某一个 A_{sp} 的比値，由此可見，一个 A_{sp} 的値是可以任意选取的，而其余的 A_{sp} 的値則由(72.9)来确定。因此，我們引入下列的新量:

$$k_{sp}=\frac{\bar{A}_{sp}}{\bar{A}_{1p}}, \qquad (72.11)$$

这些新的量完全決定于下列的方程組，这方程組是由(72.9)得来的。

$$\sum_{s=2}^{n}(\alpha_{sl}-\beta_{sl}\omega_p^2)k_{sp}=\beta_{1l}\omega_p^2-\alpha_{1l} \qquad (72.12)$$

$l=1, 2, \cdots, n-1$。

除了方程組(72.12)的行列式等于零的特殊情形以外，从对应于某个 ω_p 値的方程組中，我們可以求得 $n-1$ 个量 k_{sp}，它們是一些确定的实数値。根据定义(72.11)，k_{sp} 是兩个复数的比値，这个比値只有在这兩个复数的輻角相同时才是实数，因此，(72.10)的全体都有相同的輻角，或者

$$\bar{A}_{sp}=\frac{1}{2}A_{sp}e^{i\varphi_p},$$

这里 $\frac{1}{2}A_{sp}$ 是模，而輻角 φ_p 对于所有的 s 来說都是一样的。根据

(72.11)，我們可以把 $\bar{A}_{sp}$ 写成：

$$\bar{A}_{sp}=\frac{1}{2}A_{1p}k_{sp}e^{i\varphi_p}。$$

現在，將(72.7)的特解表示为：

$$x_{sp}=\frac{1}{2}A_{1p}k_{sp}\left[e^{i(\omega_p t+\varphi_p)}-e^{-i(\omega_p t+\varphi_p)}\right],$$

或是
$$x_{sp}=A_{1p}k_{sp}\cos(\omega_p t+\varphi_p) \tag{72.13}$$

$s=1, 2, \cdots, n$。

表达式(72.13)的意义是：在所考察的系統中，存在着这样一种特殊的运动，在这种运动中，系統的每个坐标都以一个頻率 ω 作諧振动，而且，所有这些坐标的振动都同相位。只有一个坐标即第一个坐标的振动振幅可以为任意値(与起始条件有关)，而所有其余坐标的振动振幅，則与第一个坐标的振幅保持一定的比値(k_{sp})。所有坐标的振动的起始相位 φ_p 都是相同的。

当系統作(72.13)这种类型的特殊振动时，只有 A_{1p} 和 φ_p 这兩个量是任意的，其余的量——ω_p 和所有的 k_{sp}——則决定于系統的結構。对于任何固有頻率 ω_p 来說，都可以發生这种特殊振动，因此方程組(72.2)的通解，或者，我們所考察的系統在任何情形下的固有振动都具有下列形式：

$$x_s=\sum_{p=1}^{n}x_{sp}=\sum_{p=1}^{n}A_{1p}k_{sp}\cos(\omega_p t+\varphi_p) \tag{72.14}$$

$s=1, 2, \cdots n$。

解中含有 $2n$ 个由起始条件来确定的常数：A_{11}，$A_{12}\cdots$，A_{1n} 和 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$。

公式(72.14)代表一个具 n 个自由度的綫性系統中的固有振动；当固有振动时，每个坐标都作复杂的运动，这种运动是由以系統的固有頻率 ω_p 作振动的 n 个諧振动的和組成的。固有振动服

从下面的規律：1）所有坐标的同一頻率的諧振动，不是同相位就是反相位。2）如果有一个坐标的某个頻率的振动振幅已經給定，那末，所有其余坐标的这一頻率的振动振幅，便都具有确定的値。第二条有时可以这样說：对于各个坐标的某个固有頻率的振动来說，其振动振幅的分布决定于系統的結構。k_{sp}一量称为振幅的分布系数，可以用下列矩陣来表示：

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ k_{21} & k_{22} & & \cdots\cdots & k_{2n} \\ k_{31} & \cdots & & \cdots\cdots & k_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ k_{n1} & \cdots & & \cdots\cdots & k_{nn} \end{Vmatrix} \qquad (72.15)$$

由于將振幅都归結到第一个坐标的振幅，那末，矩陣（72.15）的第一列便由 1 所組成，还可以將振幅归結到关于某个頻率的任一坐标的振幅，这时，在矩陣的每一行中，一定有一个数値等于 1。

为了能更清楚地設想固有振动的情形，我們来考虑一个例子。

§73. 附有三个小珠的弦的固有振动

我們来考察一根具有恒定張力的弦的橫振动，在这弦上，穿有几个小珠，各珠彼此距离相等。由于小珠的直徑比它們之間的距离小很多，我們就把小珠認为是具有一定質量的点，并假定弦是沒有重量的，这就是說，弦的質量比小珠的質量要小很多。这个振动的例子，看来像是很不切合实际，然而它却很便于說明在一个具多个自由度的系統中的振动的一切重要特点。

假設弦的長度为 $4l$，有三个小珠固定在弦上，各珠的距离相等（圖 199）。

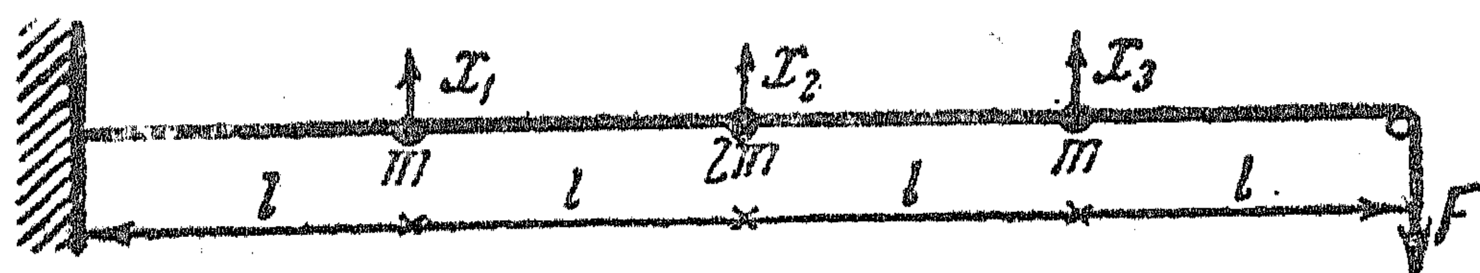


圖 199.

小珠的質量是 $m, 2m, m$。在振动时，弦的張力 F 保持不变。振动是發生在一个平面內，小珠的位移垂直于弦，并且分別用 x_1, x_2, x_3 来表示，如圖所示。

在这个例子中，写出每个小珠在受弦的力作用时的运动方程式，比用能量表达式

的一般方法来求解，要簡單些。

我們假定 x_1, x_2, x_3 比 l 小很多，因此，弦的偏角的正弦和正切部可以用偏角来替代，于是运动方程式將是：

$$m\ddot{x}_1=\frac{F}{l}(-x_1+x_2-x_1),$$
$$2m\ddot{x}_2=\frac{F}{l}[-(x_2-x_1)+(x_3-x_2)] \tag{73.1}$$
$$m\ddot{x}_3=\frac{F}{l}[-(x_3-x_2)-x_3].$$

对第一个小珠而言，力 $\frac{Fx_1}{l}$ 指向平衡位置，而力 $\frac{F}{l}(x_2-x_1)$ 的方向是离开平衡位置等等。

我們用下列符号：

$$n_1^2=\frac{2F}{ml},\ n_2^2=\frac{F}{ml},\ n_3^2=\frac{2F}{ml}=n_1^2. \tag{73.2}$$

这是系統的部分频率的平方。例如：当第二个和第三个小珠固定时，n_1 就是第一个小珠振动的部分频率。

这样一来，运动方程(73.1)可以写成：

$$\ddot{x}_1+\frac{n_1^2}{2}(2x_1-x_2)=0,$$
$$\ddot{x}_2+\frac{n_2^2}{2}(-x_1+2x_2-x_3)=0 \tag{73.3}$$
$$\ddot{x}_3+\frac{n_1^2}{2}(-x_2+2x_3)=0.$$

在这里，可以看出一个規律，根据这个規律，不管弦附有多少个小珠，都不难写出这弦的运动方程式。方程組(73.3)是方程組(72.2)的特殊情形。这时，三个坐标是彈性耦合在一起的，在这种場合，当 $s\neq j$ 时，所有的 β_{sj} 都等于零。

我們来求下列形式的(73.3)的解：

$$x_1=A_1e^{i\omega t},$$
$$x_2=A_2e^{i\omega t},$$
$$x_3=A_3e^{i\omega t}.$$

把它們代入(73.3)，我們得到：

$$(n_1^2-\omega^2)A_1-\frac{1}{2}n_1^2A_2=0,$$
$$-\frac{1}{2}n_2^2A_1+(n_2^2-\omega^2)\ A_2-\frac{1}{2}n_2^2A_3=0,$$
$$-\frac{1}{2}n_1^2A_2+(n_1^2-\omega^2)A_3=0. \tag{73.4}$$

(73.4)是关于 A_1，A_2 和 A_3 的齐次方程組，令其行列式等于零，这等式就是确定固有

頻率的方程式:

$$(n_1^2-\omega^2)\left[(n_1^2-\omega^2)(n_2^2-\omega^2)-\frac{1}{2}n_1^2n_2^2\right]=0. \tag{73.5}$$

这个方程的一个根,卽一个固有頻率是:

$$\omega_2=n_1. \tag{73.6}$$

根据(73.2),有 $n_1^2=2n_2^2$,如果考慮到这一关系,那末,我們就得到其余的兩个頻率的数値:

$$\omega_1=\frac{1}{2}\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot n_1,$$

$$\omega_3=\frac{1}{2}\sqrt{3+\sqrt{5}}\cdot n_1. \tag{73.7}$$

必須指出,固有頻率是按遞增的次序来排列的,也就是:

$$\omega_1<\omega_2<\omega_3.$$

現在,將这些頻率的値代入方程式(73.4),并且来求振幅分布系数。要記得,根据定义:

$$k_{21}=\frac{A_2}{A_1},\quad k_{31}=\frac{A_3}{A_1}.$$

考慮到(73.6)和(73.7)时,我們就可写出頻率为 ω_1 的方程組(73.4)。

$$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})-k_{21}=0,$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\,k_{21}-\frac{1}{2}k_{31}=0, \tag{73.8}$$

$$-k_{21}+\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})k_{31}=0.$$

方程組(73.8)的解是:

$$k_{21}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}),\quad k_{31}=1.$$

在相应的起始条件下,弦仅仅以第一个頻率 ω_1 作振动,而弦在振动的任何瞬間具有如圖200所示的形狀。所有的小珠都作同相位的振动,第一个与第三个小珠的振幅是相同的,中間一个小珠的振幅要大 $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ 倍。在考慮这个振动时,我們可以了解到:如果將弦由平衡位置拉到如圖200所示的位置,然后放手,那末,小珠和弦將只發生第一个頻率 ω_1 的固有振动,所有的小珠將在同一瞬間經过平衡位置,而且在任何其他的瞬間,弦的形狀会与圖200所示的形狀相似。

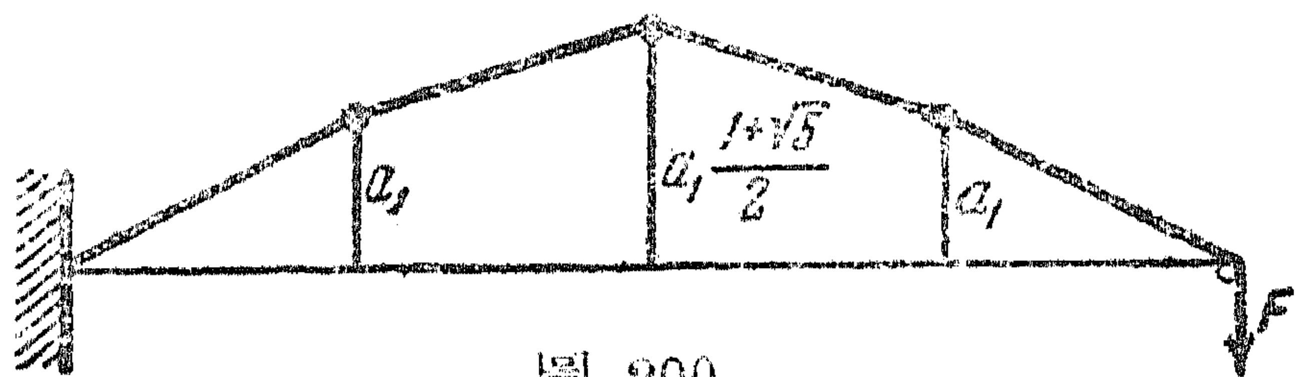


圖 200.

用同样的方法,我們可以求得其余兩个頻率的分布系数:

对于 $\omega_2=n_1$ 而言,

$$k_{22}=0,\quad k_{32}=-1.$$

对于 $\omega_3=\frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{5}}\cdot n_1$ 而言，

$$k_{23}\doteq\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}),\ k_{33}=1. \tag{73.9}$$

对应于这些频率的振动波形表明在圖 201 上。

分布系数的矩陣具有下列形式：

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix}\right\| \tag{73.10}$$

在任何起始条件下，任何固有振动可以用这三个諧振动的和来表示：兩头的小珠都以三个频率作振动，而中間的一个小珠，因为 $k_{22}=0$，只以兩个频率作振动。

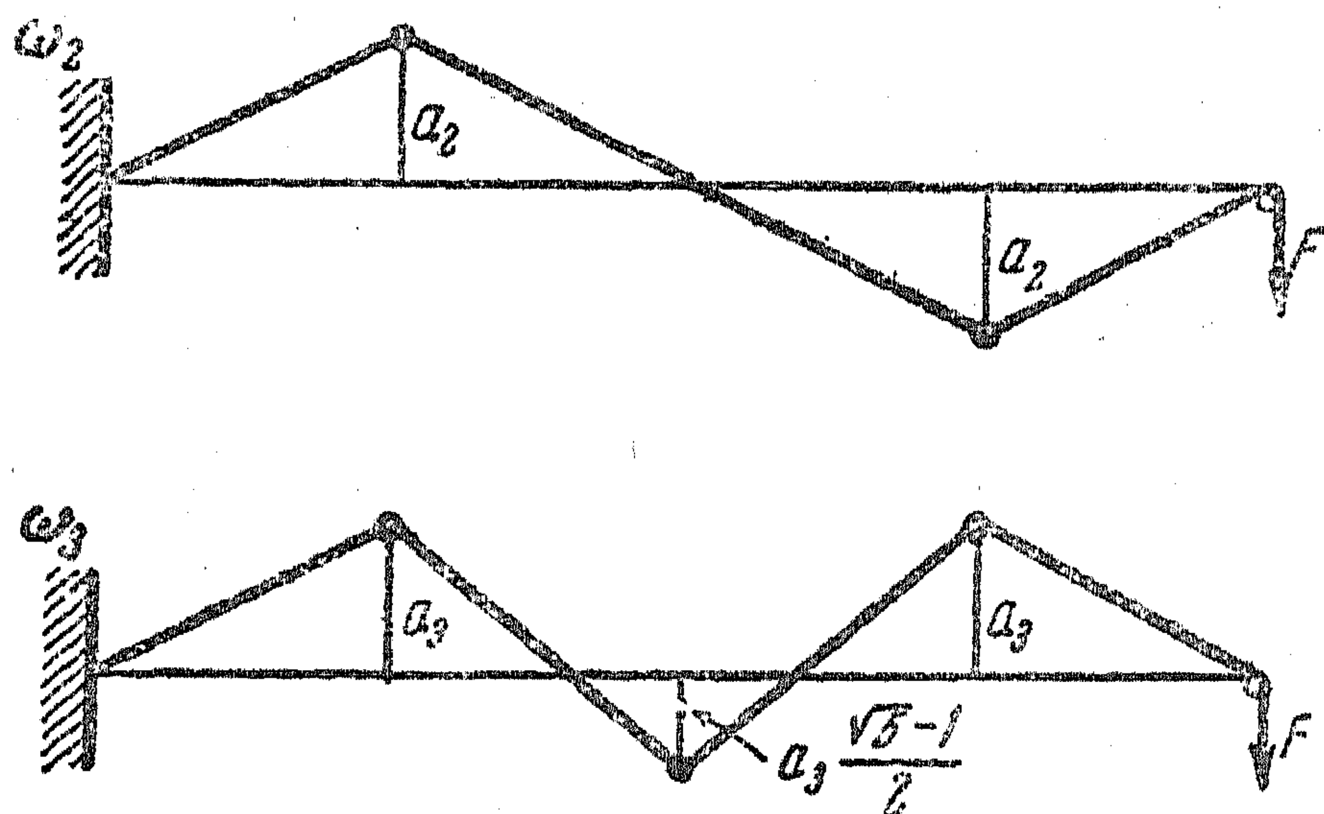


圖 201.

仅仅是为了明了和計算簡單，我們才把小珠在弦上作对称的排列。当小珠的質量不相同，以及它們在弦上作任意的排列时，显然，用同样的方法仍可求得固有频率和振幅的分布。

本节中所得到的結果，可以应用到这种类型的任何振动系統上去。例如：圖 202和 203 所示的系統的固有振动，就具有这样的形式。在机械系統的例子中，部分频率的值等于：

$$n_1^2=\frac{2k}{m},$$

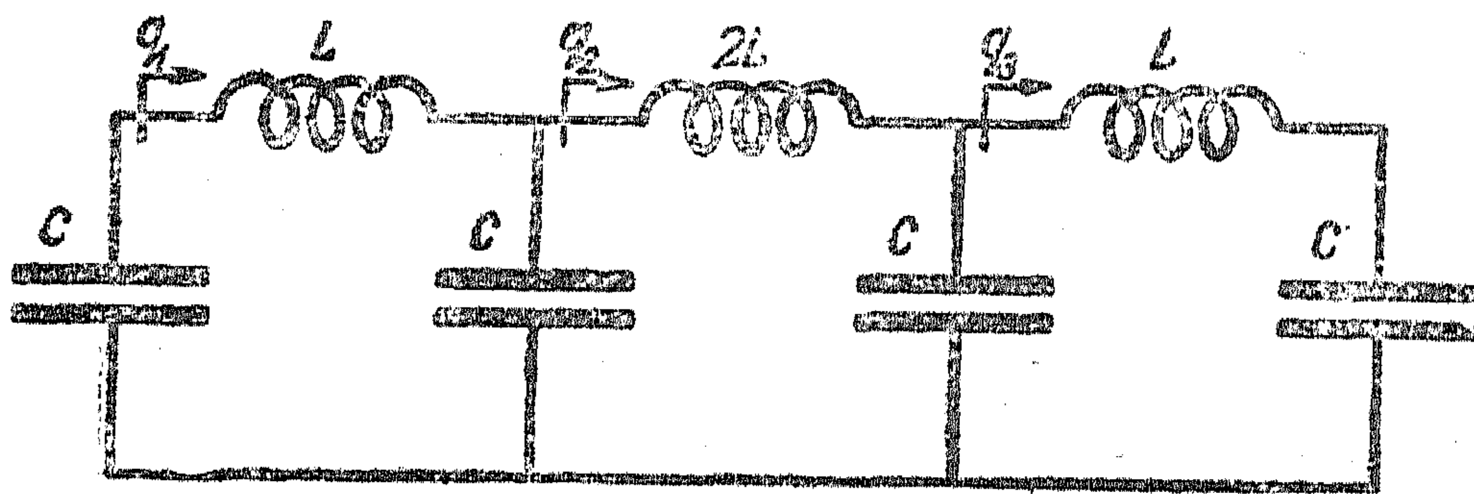


圖 202.

而在电气系統的例子中，部分频率等于：

$$n_1^2=\frac{2}{LC}.$$

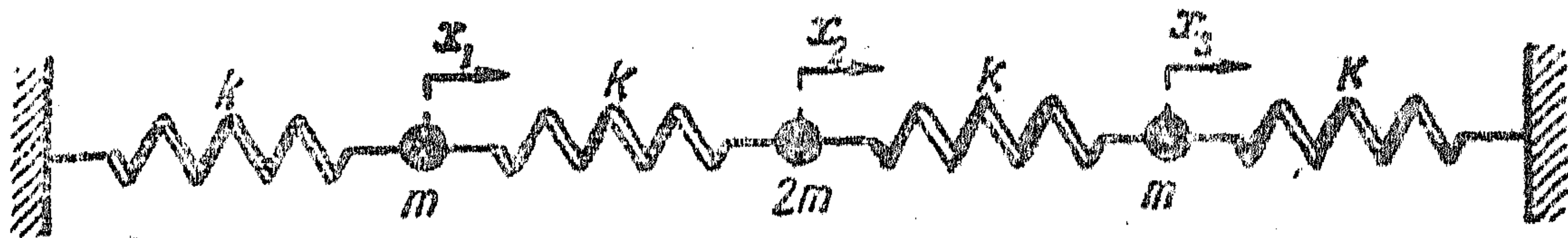


圖 203.

在第一个例子中，是考察三个質量的縱振动，它們是由具有相同的剛度 k 的彈簧耦合起来的，并且，选取質量的位移作为坐标。在第二个例子中，是考察含有三个耦合

迴路的系統中的电振动，并把在瞬間 t 通过某一支路的电量取作坐标。

§74. 正則坐标

在分析具多个自由度系統的固有振动(72.14)时，我們可以仿照以前分析兩个自由度系統时那样，即引用正則坐标，也就是只作諧振动的坐标。事实上，如果我們給定 n 个諧振动

$$\xi_j = A_j \cos(\omega_j t - \varphi_j), \tag{74.1}$$

它們的和表示第一个坐标 x_1 的运动，那末，所有其余的坐标的运动也就完全給定了。因此，量

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_n.$$

可以認为是系統的新坐标，并称为正則坐标。

根据(74.1)和(72.14)，將普通坐标变为正則坐标的变換公式具有下列形式：

$$x_s = \sum_{j=1}^{n} k_{sj} \xi_j \tag{74.2}$$

$s = 1, 2, \cdots, n$。

每一个正則坐标 ξ_j 的値，当其余的正則坐标都等于零时，給出了所有坐标 x_s 的确定値。

我們假設：$\xi_3 = a$，而其余的 ξ_j 都等于零，这就表示，所有的坐标 x_s 具有下列的値：

$$x_1 = a, \quad x_2 = k_{23} a, \quad x_3 = k_{33} a, \cdots, \quad x_n = k_{n3} a. \tag{74.3}$$

在一般情况，坐标 x_s 的値，由每个正則坐标 ξ_j 所对应的 n 个分量的和所确定。

如果某一个正則坐标 ξ_j 以本身的頻率作諧振动，那末，这就意味着：系統的全部坐标 x_s 也都以同样的頻率作同相位的（或反相位的）諧振动，并且具有确定的振幅，因此，便把和正則坐标 ξ_j 的諧振动所对应的振动，称为正則振动。現在我們就可以說，系統的

任何固有振动都是正則振动的和。

变换(74.2)可以直接認为是坐标 x_s 的綫性变换。关于正則坐标的問題还可以这样提出：我們取一种將坐标 x_s 变换到坐标 ξ_s 的綫性变换，在一般情形中，这变换具有任意的系数，我們还要求这样的一些系数，这些系数可以使得动能和位能的表达式中只出現 $\dot{\xi}_j$ 的平方以及 ξ_j 的平方，也就是說，在动能和位能的表达式中不含有确定坐标間耦合的項。这时，拉格朗日方程式將是：

$$\ddot{\xi}_j+\omega_j^2\xi_j=0, \tag{74.4}$$

上式中，$j=1, 2, \cdots, n$。

我們所提出的問題的解答归結到变换公式(74.2)，变换公式中的未知系数，就剛好是固有振动的振幅分布系数(k_{sj})。

我們已經采用了另一个較为明了和簡單的方法，显然，根据定义(74.1)，每一个 ξ_j 总能滿足諧振动方程式(74.4)中的一个方程式。

在系統作固有振动时，每一个正則坐标都以它所对应的固有頻率作純諧振动。这是因为对于每一个固有頻率，都有一个正則坐标跟它对应。

显然，根据定义(74.1)，可以把第一个坐标中号碼为 j 的頻率的振幅称为第 j 个正則振动的振幅。

系統中的任何固有振动都是正則振动的和，而其中的每一个都具有确定的振幅和相位，如果我們知道正則振动，就可以根据公式(74.1)，确定每一个坐标 x_s 的振动。

§75. 正則坐标的正交性

每一个正則振动都具有一定的振幅分布。在兩个任意正則振动的分布系数之間存在着一种关系，这种关系在理論上起着重要的作用，我們把它称为正則坐标(或正則振动)的正交条件。

現在，我們来导出一般形式的正交条件，一个关于振幅 A_{sp} 的方程組(72.9)可以写成：

$$\sum_{s=1}^{n}(\alpha_{sl}-\omega_j^2\beta_{sl})k_{sj}=0$$

$l=1, 2, \cdots, n$，或是写成：

$$\sum_{s=1}^{n}(\alpha_{sl}k_{sj}=\omega_j^2\sum_{s=1}^{n}\beta_{sl}k_{sj} \qquad (75.1)$$

同样，$l=1, 2, \cdots, n$。

順便提一下，(75.1) 中任一方程式都代表一个确定固有頻率的公式

$$\omega_j^2=\frac{\sum\limits_{s=1}^{n}\alpha_{sl}k_{sj}}{\sum\limits_{s=1}^{n}\beta_{sl}k_{sj}}. \qquad (75.2)$$

如果正則振动的分布是已知的，那末，借助于(75.2)，就可以确定頻率。

对于其他的頻率 ω_p，也可以写出(75.1)型的等式：

$$\sum_{s=1}^{n}\alpha_{sl}k_{sp}=\omega_p^2\sum_{s=1}^{n}\beta_{sl}k_{sp}, \qquad (75.3)$$

$l=1, 2, \cdots, n$。

現在，將公式(75.1)中的每一个式子乘以 k_{lp}，而將(75.3)中的每一个式子乘以 k_{lj}，同时，作出兩表达式按脚标 l 連加的和。

$$\sum_{l,s=1}^{n}\alpha_{sl}k_{sj}k_{lp}=\omega_j^2\sum_{l,s=1}^{n}\beta_{sl}k_{sj}k_{lp},$$

$$\sum_{l,s=1}^{n} \alpha_{sl} k_{sp} k_{lj} = \omega_p^2 \sum_{l,s=1}^{n} \beta_{sl} k_{sp} k_{lj}.$$

在上面的兩个等式中，以下式减上式，我們得到：

$$\sum_{l,s=1}^{n} \alpha_{sl} k_{sj} k_{lp} - \sum_{l,s=1}^{n} \alpha_{sl} k_{sp} k_{lj} =$$

$$= \omega_j^2 \sum_{l,s=1}^{n} \beta_{sl} k_{sj} k_{lp} - \omega_p^2 \sum_{l,s=1}^{n} \beta_{sl} k_{sp} k_{lj}. \qquad (75.4)$$

由于根据（71.9），$\alpha_{sl}=\alpha_{ls}$，同时根据（71.13），$\beta_{sl}=\beta_{ls}$。那末，在（75.4）中，等式一边的兩个和数是相同的，因此，对于任何的兩个值 j 和 p，有：

$$(\omega_j^2 - \omega_p^2) \sum_{s,l=1}^{n} \beta_{sl} k_{sp} k_{lj} = 0. \qquad (75.5)$$

如果 $\omega_j \neq \omega_p$，那末，对于任何一对 j 和 p，只要是 $j \neq p$，就有：

$$\sum_{s,l=1}^{n} \beta_{sl} k_{sp} k_{lj} = 0. \qquad (75.6)$$

附于兩个正則振动的分布系数的条件（75.6），称为正交条件。

在仅仅具有彈性耦合的系統中，当 $s \neq l$ 时，所有的 $\beta_{sl}=0$，因此动能的系数矩陣是对角矩陣。在这种場合，正交条件（75.6）是按某一个脚标連加的和：

$$\sum_{s=1}^{n} \beta_{ss} k_{sp} k_{sj} = 0 \qquad (75.7)$$

当 $j \neq p$ 时，对于所有的 j 和 p 都成立。

在研究系統的固有振动时，常常利用正交条件，由（75.5）中看到：当 $j=p$ 时，量

$$\sum_{l,s=1}^{n}\beta_{sl}k_{sj}k_{lj}$$

不等于零。这个量的物理意义將在下一节中予以說明。

§76. 固有振动的能量和正則振动的能量

我們假定：在系統中發生一个正則振动，或者由某一个頻率的振动所組成的固有振动。令

$$x_s=a_jk_{sj}\cos(\omega_jt+\varphi_j),$$

上式中，$s=1,2,3,\cdots,n$，而 a_j 是頻率为 ω_j 的正則振动的振幅。当所有坐标的速度

$$\dot{x}_s=-\omega_ja_jk_{sj}\sin(\omega_jt+\varphi_j)$$

达到最大値的瞬間，振动的全部能量就等于在該瞬間的动能，而当瞬間 t_0 滿足条件 $\omega_jt_0+\varphi_j=\frac{\pi}{2}m$ 时，便会如此。这里 m 是任意奇数。

在任何运动的場合，根据(71.11)，动能是

$$T=\sum_{s,l=1}^{n}\beta_{sl}\dot{x}_s\dot{x}_l.$$

因为在一个正則振动的情形中，系統中所有的坐标作同相位或反相位的振动，那末，所有坐标的速度，当同一瞬間 t_0，在平衡位置具有最大値。显然，在瞬間 t_0，帶有脚标 j 的正則振动的动能就等于振动的全部能量 E_j，因此

$$E_j=T(t_0)=a_j^2\omega_j^2\sum_{s,l=1}^{n}\beta_{sl}k_{sj}k_{lj}.\tag{76.1}$$

我們用符号

$$\frac{1}{2}B_j=\sum_{s,l=1}^{n}\beta_{sl}k_{sj}k_{lj},\tag{76.2}$$

同时注意到量 B_j 具有系数 β_{sl} 的因次，例如：就机械系統来說，如果 x_s 是位移坐标，那末，B_j 具有質量的因次；就电气系統来說，如果 x_s 是电荷，那末，B_j 就具有感应系数的因次等等。

我們可以把正則振动的能量写成这样：

$$E_j=\frac{1}{2}B_j a_j^2\ \omega_j^2 \tag{76.3}$$

如果 x_s 是位移坐标，那末，$a\omega$ 是速度，而 B 是質量。因此，在一般的場合，我們称量 B_j 是号碼为 j 的正則坐标的"有效質量"，要懂得，B_j 的値是随着坐标的物理意义不同而不相同的。

还可以証明：正則振动的全部能量將等于在瞬間 t_1 的位能，而瞬間 t_1 是由下列条件来确定的。

$$\omega_j t_1+\varphi_j=m\pi \qquad 这里\quad m=0,1,2,\cdots$$

在瞬間 t_1，所有的坐标 x_s 都是在离平衡位置最远的地方，而所有坐标的速度都等于零。由此推出：

$$E_j=a_j^2\sum_{s,l=1}^{n}\alpha_{sl}k_{sj}k_{lj}. \tag{76.4}$$

类似于正則坐标的"有效質量"，可以引入正則坐标的"有效剛度"：

$$S_j=2\sum_{s,l=1}^{n}\alpha_{sl}k_{sj}k_{lj}, \tag{76.5}$$

于是，振幅为 a_j 的正則振动，其全部能量等于：

$$E_j=\frac{1}{2}s_j a_j^2. \tag{76.6}$$

比較(76.3)和(76.6)，我們得到：

$$B_j\omega_j^2=S_j,$$

或是

$$\omega_j^2=\frac{S_j}{B_j}=\frac{\sum\limits_{s,l=1}^{n}\alpha_{sl}k_{sj}k_{lj}}{\sum\limits_{s,l=1}^{n}\beta_{sl}k_{sj}k_{lj}}, \tag{76.7}$$

这个公式，在形式上类似于具一个自由度系統的固有頻率的公式。

可以証明：在一般情形中，系統的固有振动的动能，等于各个正則振动能量的和。

其实，令系統的固有振动具有这样的形式：

$$x_s=\sum_{j=1}^{n}a_jk_{sj}\cos(\omega_jt+\varphi_j).$$

那末这些振动的动能

$$T=\sum_{s,l=1}^{n}\beta_{sl}\dot{x}_s\dot{x}_l=\sum_{s,l=1}^{n}\beta_{sl}\cdot\sum_{j=1}^{n}a_jk_{sj}\omega_j\sin(\omega_jt+\varphi_j)\cdot\sum_{p=1}^{n}a_pk_{lp}\omega_p\sin(\omega_pt+\varphi_p)=$$

$$=\sum_{j,l=1}^{n}a_ja_p\omega_j\omega_p\sin(\omega_jt+\varphi_j)\sin(\omega_pt+\varphi_p)\cdot\sum_{s,l=1}^{n}\beta_{sl}k_{sj}k_{lp}.$$

当注意到正交条件(75.6)时，我們得到：

$$T=\sum_{j=1}^{n}a_j^2\omega_j^2\sin^2(\omega_jt+\varphi_j)\cdot\sum_{s,l=1}^{n}\beta_{sl}k_{sj}k_{lj}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}B_j\,a_j^2\omega_j^2\sin^2(\omega_jt+\varphi_j). \tag{76.8}$$

因此，任何形式的固有振动的动能，都是各个正則振动能量的和，我們要着重指出：这是正則振动(或坐标)正交性的結果。

如果所有的正則坐标有着相同的振幅，那末，根据(76.6)，每一个坐标的能量，和同一坐标的"有效系数" S_j 成正比。

§77. 正則坐标标尺的变化

頻率 ω_j 的正則振动(坐标)的大小是完全任意确定的，我們把第一个坐标 x_1 的同一頻率的振动振幅取为 1，来作量測正則坐标 ξ_j 的單位，当这样选取它的"标尺"时，正

則坐标 ξ_j 的振幅便等于 a_j，等于第一个坐标 x_1 中頻率为 ω_j 的諧振动分量的振幅。我們記得，在分布系数的矩陣(72.15)中，第一列所有的元素都等于 1，$k_{1j}=1$。显然，还可以用完全不同的方法来选取正則坐标的單位，这是因为在物理上，仅仅給定了具該頻率的各个振动振幅与某一个振幅的比值；也可以把某个其他的坐标 x_i 中的振幅取为 1，来作为正則坐标的單位，而且对于不同的頻率来說，可以选取得不同。也可以認为，正則坐标的單位，只是第一个坐标 x_1 中具有相应頻率的振动振幅的一定的倍数或分数等等。在振动理論中，往往利用这些情况来簡化公式和計算。例如：可以这样来选取正則坐标的量測單位，就是要使得在新的标尺中，对于所有的正則坐标来說，都具有同样大小的"有效質量"。

設在用新的标尺时，每一个正則坐标的振幅是 b_j，并且与 a_j 有如下的关系：

$$b_j=\sqrt{\frac{B_j}{B_0}}\cdot a_j, \tag{77.1}$$

上式中，B_0 是一个任意常数，它具有 B_j 的因次。显然，在这里，單位的选取仍然是任意的——常数 B_0 是任意的。于是，根据(76.3)，在新的坐标中，正則振动的全部能量是：

$$E_j=\frac{1}{2}B_0\omega_j^2 b_j^2. \tag{77.2}$$

因此，在正則坐标的这个标尺中表明了，如果所有的正則坐标具有相同的振幅，那末，每一个正則振动的全部能量，便与它的頻率的平方成正比。

在普通坐标 x_s 中，頻率为 ω_j 的諧振动振幅等于 $k_{sj}a_j$，并可以把它写成：

$$k_{sj}a_j=k_{sj}\sqrt{\frac{B_0}{B_j}}b_j=\varepsilon_{sj}b_j, \tag{77.3}$$

这里，引用了下列符号：

$$\varepsilon_{sj}=\sqrt{\frac{B_0}{B_j}}k_{sj}. \tag{77.4}$$

用正則坐标的新标尺时，分布系数的矩陣是 ε_{sj}，在这一矩陣中，一般說来，所有的元素都不同于 1。这个矩陣的第一列含有元素

$$\varepsilon_{1j}=\sqrt{\frac{B_0}{B_j}}. \tag{77.5}$$

就 ε_{sj} 来說，也可以写出正則坐标的正交条件，其实把(75.6)上乘以

$$\frac{B_0}{\sqrt{B_jB_p}},$$

并考虑到(77.4)，則当 $j\neq p$ 时，就得到：

$$\sum_{s,l=1}^{n}\beta_{sl}\varepsilon_{sj}\varepsilon_{lp}=0.$$

將(76.2)乘以 E_0 除以 B_j 后，正則坐标的"有效質量"在用这个标尺时的相等条件就可以写成：

$$2\sum_{s,l=1}^{n}\beta_{sl}\varepsilon_{sj}\varepsilon_{lj}=B_0, \tag{77.6}$$

这里，根据(77.4)，引入了新的分布系数。

利用对应于矩陣 ε_{sj} 的正則坐标，可以使固有振动的計算大为簡化。

显然，也可以用其他的方法来選取正則坐标的标尺。

§78. 附有小珠的弦的正則坐标

我們用在§73中已經研究过的例子，来討論正則坐标和正則振动。

將普通坐标 x 变换到正則坐标 ξ 的变换公式，具有下列形式：

$$\xi_1=-\frac{x_1+4x_2+x_3}{2\sqrt{5}};\quad \xi_2=\frac{x_1-x_2}{2};$$
$$\xi_3=\frac{(1+\sqrt{5})(x_1+x_3)-4x_2}{2\sqrt{5}}; \tag{78.1}$$

將分布系数(73.9)代入(74.2)后，就得到上式。

正則振动的分布，可以用矩陣 k_{sj} (73.10)来表示。如果令 $a_1=a_2=a_3=1$，正則振动的分布便具有如圖200和201所表明的形式。每个正則振动，在第一个坐标中有一个振幅等于1。

不难断言，正交条件(75.6)也是成立的，对于含有第二个(ω_2)正則振动的兩个乘积而言，这个条件是显然的，因为第二个坐标(x_2)的振幅总是等于零。而对于第一个和第三个頻率的乘积而言，条件(75.6)是

$$\sum_{s=1}^{3}\beta_{ss}k_{s1}k_{s3}=m\left[\frac{1}{2}-\frac{(1+\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)}{4}+\frac{1}{2}\right]=0.$$

由正交条件推出：弦的任何任意的波形，总可以用三个波形的和来唯一地表示，这三个波形分别对应于具一定振幅的正則振动。在动能的表达式中，系数具有下列的值：

$$\beta_{11}=\frac{m}{2},\quad \beta_{22}=m,\quad \beta_{33}=\frac{m}{2}。 \tag{78.2}$$

如果 $s\neq l$ 則 $\beta_{sl}=0$。

这是由于
$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2+m\dot{x}_2^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_3^2. \tag{78.3}$$

各个正則振动的"有效質量"具有下面的值：

$$B_1=2\sum_{s=1}^{3}\beta_{ss}k_{s1}^2=2m\left[\frac{1}{2}+\frac{(1+\sqrt{5})^2}{2}+\frac{1}{2}\right]=m(5+\sqrt{5}),$$

$$B_2=2\sum_{s=1}^{3}\beta_{ss}k_{s2}^2=2m\left[\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}\right]=2m, \tag{78.4}$$

$$B_3=2\sum_{s=1}^{3}\beta_{ss}k_{s3}^2=2m\left[\frac{1}{2}+\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}+\frac{1}{2}\right]=m(5-\sqrt{5}).$$

如果每一个正則振动具有振幅 a，那末，根据(76.1)、(73.7)、(73.2)，振动的能量将是:

$$E_1=\frac{1}{2}\ m(5+\sqrt{5})\omega_1^2a^2=\frac{1}{8}\ m(5+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})n_1^2a^2=\frac{F}{2l}(5-\sqrt{5})a^2,$$

$$E_2=m\omega_2^2a^2=\frac{F}{2l}a^2,$$

$$E_3=\frac{1}{2}\ m(5-\sqrt{5})\omega_3^2a^2=\frac{1}{2}\ m(5-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})n_1^2\frac{a^2}{4}=\frac{F}{2l}2\sqrt{5}a^2.$$

第二个振动的能量最小。

在这样的标尺中，宜于把正則振动的分布想像为：每个正則坐标都具有相同的"有效質量"，例如 $B_0=m$。因此，根据(73.10)，(77.4)以及(78.4)，矩陣 ε_{sj} 将具有下面的形式:

$$\left\|\begin{matrix}\frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}\\ \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5+\sqrt{5}}} & 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5-\sqrt{5}}}\\ \frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}\end{matrix}\right\| \tag{78.5}$$

将正則坐标 $\xi_j'=b_j\cos(\omega_jt+\varphi_j)$ 变換到普通坐标的变換公式是这样的:

$$\begin{aligned}x_1&=\frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}\xi_1'+\frac{1}{\sqrt{2}}\xi_2'+\frac{1}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}\xi_3',\\ x_2&=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5+\sqrt{5}}}\xi_1'+\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5-\sqrt{5}}}\xi_3',\\ x_3&=\frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}\xi_1'-\frac{1}{\sqrt{2}}\xi_2'+\frac{1}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}\xi_3'.\end{aligned} \tag{78.6}$$

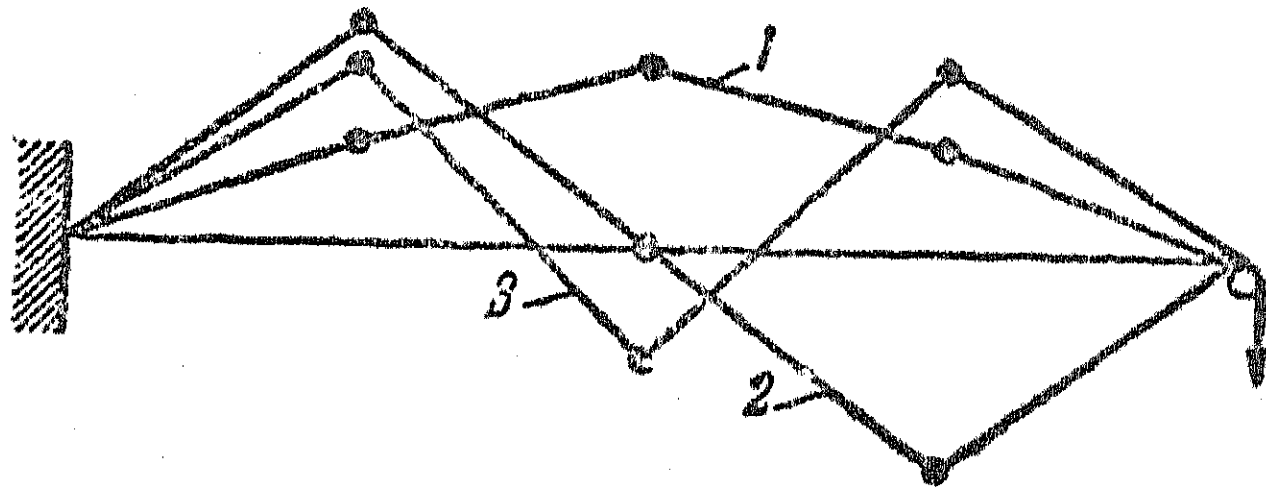


圖 204.

当正則坐标取这种标尺时，和具同样大小振幅的正則振动相对应的弦的振动，其波形如圖 204 所示。

§79. 系統的固有頻率相等的情形

应該着重指出：到現在为止，在一切情形中，我們总認为所有的 ω_j 都不相同，也就是說，頻率方程式沒有重根。例如，像在(75.6)中所写出的正交条件，以及由它所推出的全部結果，仅仅只在固有頻率不同时才有意义。

如果兩个固有頻率是相等的，那末，从这个頻率的固有振动的振幅方程式中，便不能确定各个坐标对某一个坐标的振幅的比値。在这种場合，可以任意給定兩个振幅，并且根据这兩个振幅来确定其余的振幅。其余坐标中的同一个頻率的振幅將由兩項的和所組成，其中每一項都和一个所給定的振幅有一定的关系，在这里，我們不可能述詳細理論，也不能把上面所述的加以証明，因此，只用一个例子来說明这种情形。

想像一个如圖 205 所示的电路，这是一个具三个自由度的系統。我們这样选取参数，使得 $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ 等于一个部分系統的固有頻率，这个部分系統是令基本系統中的 $q_3=0$ 而得到的。我們將对应于 q_3 的电路断开，并令剩下的系統的固有頻率为

$$\omega_1 \text{ 及 } \omega_2=\frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

这时，不难看出，当 $q_1=q_2=0$ 时，剩下的迴路 (I) 的頻率是 $\omega=$ $=\frac{1}{\sqrt{LC}}$。假定由于某种原因，在这个迴路中發生了固有振动，它們并不在电气系統中的其余部分激励任何振动。事实上，頻率为 ω 的迴路中的电流并不在 1 与 2 兩点之間产生电压，这是因为电容电抗 $(1/\omega C)$ 和电感电抗 (ωL) 相等，而在兩个电抗上的电压降的相位又相反。另一方面，如果在不包含迴路 (I) 的部分系統中，發生固有頻率为

$$\omega_2=\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

的振动，那末，根据同样的理由，它們也不会在迴路(I)中引起振动。因此，在系統中，有兩个具同一頻率 ω_2 的諧振动是可能的，而且，在各个部分系統中，这一頻率的兩个振动的振幅是完全任意的。説得更正确些，它們只与起始条件有关。或者，对于固有頻率相重的情形来説，系統好像是由兩个被隔离了的、完全独立的部分所組成。

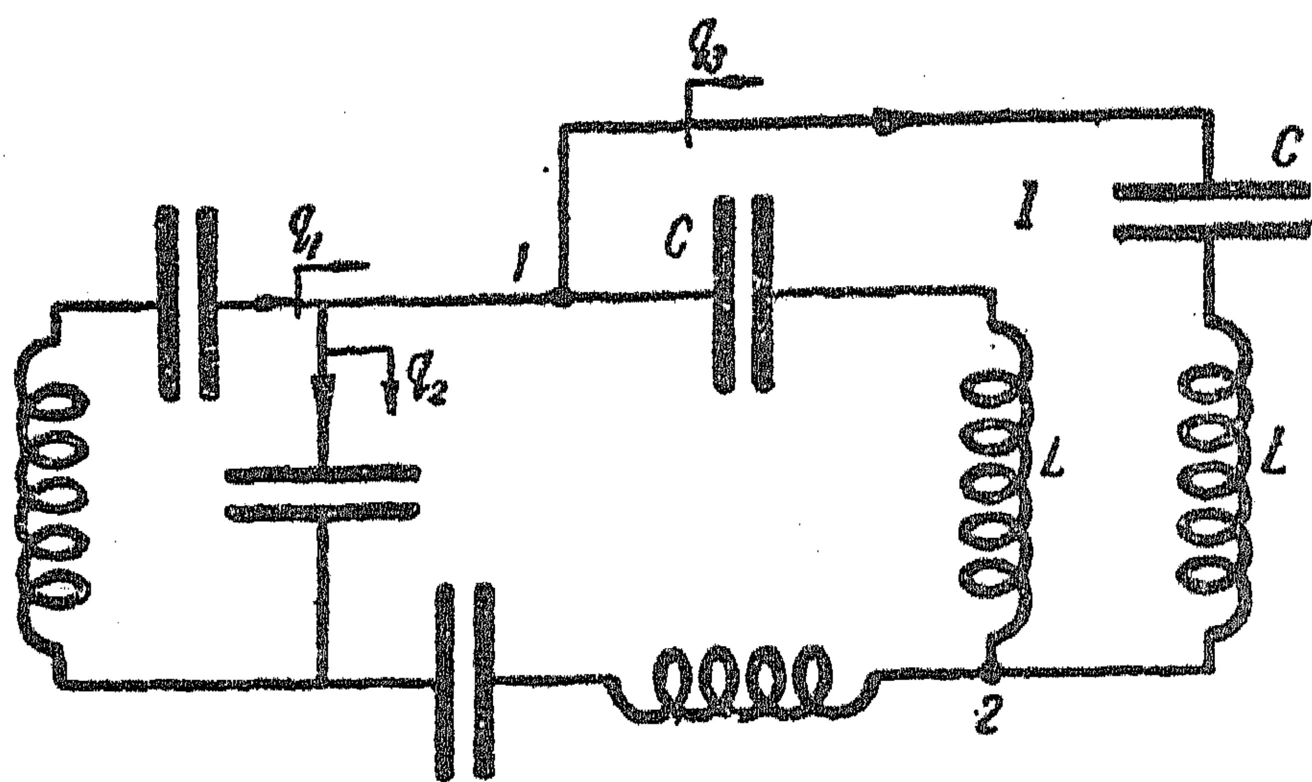


圖 205.

如果在具兩个迴路的系統中發生了第二个頻率 ω_1 的振动，那末，迴路 I 就不会不受这些振动的影响，因此，系統的（圖 205）第三个固有頻率不等于 ω_1，对第三个頻率来説，会發生通常的振幅分布，只要把系統某一支路以該頻率作振动的振幅給定，所有其余的支路中的振幅便确定了。

我們注意，这种情形只有理論上的价値，因为，当参数有不大的变化，或者不大的摩擦时，就不可能將系統分开。但是，了解这种情形在原則上是很重要的。

§80. 一个或是几个固有頻率等于零

如果在解固有頻率的方程式时，得到了一个或几个零根，那么，这种情况意味着什么呢？

由基本方程式(72.2)和(72.4)，我們得到在 $\lambda=0$ 时的方程組

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{sj} A_j = 0 \tag{80.1}$$

$s=1, 2, \cdots\cdots, n$。又因为在这种情形中，$x_s = A_s$，那末，方程組(80.1)便表示加在坐标 x_s 上的一种約束，換句話說，不是所有的坐标都是独立的。由(80.1)式，我們可以把一个坐标用其余的坐标来表示，并且可以把它消去，如果剩下来的方程組有 $n-1$ 个变数 x_s，而且沒有零根，那末，在这种情形中，方程組就具有 $n-1$ 个独立变数。

例題：設有三个飞輪裝在一根能够在軸承中自由旋轉的軸上(圖 206)，現在，我們来确定其扭轉振动的固有頻率。令飞輪轉角的坐标为 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$，飞輪 1 与 2 和 2 与 3 之間的各段軸的扭轉剛度系数分别用 c_1 和 c_2 来表示。那末，系統的动能和位能是：

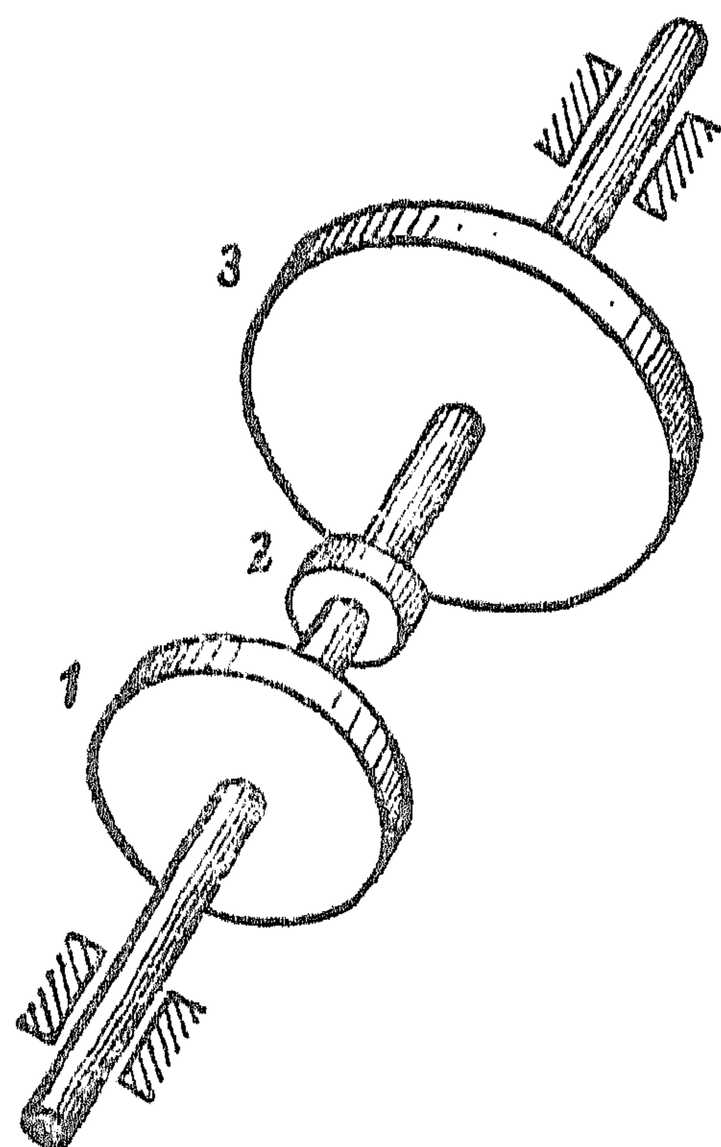


圖 206.

$$T = \frac{I_1 \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{I_2 \dot{\varphi}_2^2}{2} + \frac{I_3 \dot{\varphi}_3^2}{2},$$
$$U = \frac{c_1(\varphi_2 - \varphi_1)^2}{2} + \frac{c_2(\varphi_3 - \varphi_2)^2}{2}, \tag{80.2}$$

上式中，I_1, I_2, I_3 是三个飞輪的轉动慣量。系統的运动方程式是：

$$I_1\ddot{\varphi}_1 - c_1(\varphi_2 - \varphi_1) = 0,$$
$$I_2\ddot{\varphi}_2 - c_2(\varphi_3 - \varphi_2) + c_1(\varphi_2 - \varphi_1) = 0, \tag{80.3}$$
$$I_3\ddot{\varphi}_3 - c_2(\varphi_3 - \varphi_2) = 0.$$

不难断言，这个系統的頻率方程式具有零根，而且，只要將(80.3)中所有的方程式加起来以后，就可以非常簡便地建立起坐标間的关系，这样作了以后，我們得到：

$$I_1\ddot{\varphi}_1 + I_2\ddot{\varphi}_2 + I_3\ddot{\varphi}_3 = 0,$$
$$I_1\dot{\varphi}_1 + I_2\dot{\varphi}_2 + I_3\dot{\varphi}_3 = 常数 = A \tag{80.4}$$

$$I_1\varphi_1+I_2\varphi_2+I_3\varphi_3=At+\text{常数}$$

在作出方程式以前，我們可以立刻写出(80.4)的第二个条件。因为这就是动量矩守恒定律的結果。由于在軸上沒有外力矩作用，那末，动量矩应当保持不变，附有飞輪的軸以常速旋轉，并作具有兩个頻率的固有振动，这是因为在振动时，三个坐标的关系，由条件(80.4)来表明。如果軸开始是处在静止狀态，那末，飞輪会作这样的运动，以致它們的总动量矩为零。

§81. 具多个自由度的系統在有阻尼的情况下的振动

在机械系統中，摩擦力会使固有振动衰减。当摩擦力十分小的时候，振动过程將接近于我們早先所研究过的过程，但是所激励的振动会随时間逐漸地削弱，逐漸衰减下去。在理論中，我們常常認为摩擦力与速度之間存在着綫性关系。

广义摩擦力系可以写成下列形式:

$$Q_s=-\sum_{l=1}^{n}\gamma_{sl}\dot{x}_l \tag{81.1}$$

$s=1, 2, \cdots, n$; 这个力系，当 $\gamma_{sl}=\gamma_{ls}$ 时，代表系統中摩擦力的一般形式。

摩擦力在 dt 时間內所作的功，可以这样表示:

$$dW=-\sum_{s,l=1}^{n}\gamma_{sl}\dot{x}_l\dot{x}_s dt. \tag{81.2}$$

摩擦力导致能量的損失，摩擦力的功(81.2)是負的。为了着重指出这一点，在定义广义摩擦力(81.1)时，我們选取了負号。

当有摩擦力存在时，利用拉格朗日方程式:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_s}+\frac{\partial U}{\partial x_s}=Q_s$$

可將运动方程式写成下列形式:

$$\sum_{l=1}^{n}(\beta_{sl}\ddot{x}_l+\gamma_{sl}\dot{x}_l+\alpha_{sl}x_l)=0 \tag{81.3}$$

$s=1, 2, \cdots, n$。

这是一个二阶綫性微分方程組，和通常情形一样，我們求得下列形式的特解:

$$x_s=\bar{A}_s e^{\lambda t}. \tag{81.4}$$

將(81.4)代入(81.3)后，我們得到了关于振幅 $\bar{A}_s$ 的 n 个代数方程式的方程組

$$\sum_{l=1}^{n}(\beta_{sl}\lambda^2+\gamma_{sl}\lambda+\alpha_{sl})\bar{A}_l=0 \tag{81.5}$$

$s=1, 2, \cdots, n$。关于 $\bar{A}_s$ 的齐次方程組(81.5)，其相容条件給出了确定 λ 的方程式:

$$\begin{vmatrix} \beta_{11}\lambda^2+\gamma_{11}\lambda+\alpha_{11}\cdots\cdots\beta_{1n}\lambda^2+\gamma_{1n}\lambda+\alpha_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_{n1}\lambda^2+\gamma_{n1}\lambda+\alpha_{n1}\cdots\cdots\beta_{nn}\lambda^2+\gamma_{nn}\lambda+\alpha_{nn} \end{vmatrix}=0. \tag{81.6}$$

方程式(81.6)的解給出了 $2n$ 个 λ 的值。由于方程式具有实系数，那末，所有的复根都会是成对的共軛复数，因此，我們可以用表示符号

$$\lambda_j=-\delta_j\pm i\omega_j. \tag{81.7}$$

这里，δ_j 和 ω_j 都是实数。量 λ_j 可以称为系統的复数固有頻率。在数学上可以証明：所有的 δ_j 都是正的。不过，系統中既不包含能源，所以系統中的振动將衰減下去，从这一点，也可以看出这一事实来。

我們注意，对于含有能源的振动系統来說，例如，对自动振动系統，以及对变量在平衡狀态附近的某个变化区域内的复杂自动調整系統来說。它們的运动方程式也具有(81.3)的形式，但是，在这种場合，在复数頻率实数部分 δ_j 的前面就可能有任意的符号。由于在系統中接有能源，系統中的振动也可能随时間增長。

假定所有的根 λ_j 都不相同，將它們代入(81.5)，和从前一样，我們也得到关于确定分布系数的方程式。显然，現在分布系数是复数，我們这样地来确定它們:

$$\bar{A}_{sj}=\bar{K}_{sj}\bar{A}_{1j}. \tag{81.8}$$

如果 $2\bar{A}_{1j}=A_{1j}e^{i\varphi_j}$，以及 $\bar{K}_{sj}=K_{sj}e^{i\vartheta_{sj}}$，那末，將全部特解加起来，我們就得到下列形式的通解:

$$x_s=\sum_{j=1}^{n}A_{1j}K_{sj}e^{-i\delta_j t}\cos(\omega_j t+\vartheta_{sj}+\varphi_j) \tag{81.9}$$

$s=1, 2, \cdots, n$。

每一个坐标的振动是具有 n 个不同頻率的阻尼振动的和。A_{1j} 和 φ_j 的大小由起始条件来确定。注意，对于每一个坐标来說，由于有 θ_{sj} 存在，在同一頻率 ω_j 的諧型余因子中，相位是不同的。

就阻尼固有振动来說，在一般情形，不可能引进正則坐标。具有很多个(5个或更多个)自由度的系統，其固有頻率和固有振动的計算是一个十分复杂的工作。实际上，关于技术問題的这种計算，只有在某些特殊場合，或者用近似的方法，才可能作出。

§82. 在無阻尼系統中的受迫振动

看来这一問題只具有理論上的价値，然而，为了解决振动理論在技术应用中所遇到的一些問題，由于阻尼受迫振动的解的复杂性，同时，因为一个沒有摩擦力的理想系統中的振动，跟具有很小

摩擦力的系統中的振动十分接近，所以人們往往考察这种理想系統在外力作用下的振动。

我們来考察，当諧外力作用在系統的每个坐标上所引起的振动。設在所有的坐标上都有一个頻率为 p 的諧力作用着，那末，根据(72.1)，在系統中的运动方程式具有下列形式:

$$\sum_{l=1}^{n}(\beta_{sl}\ddot{x}_l+\alpha_{sl}x_l)=F_s e^{ipt} \tag{82.1}$$

$s=1, 2, \cdots, n$。

在每一个坐标中將發生外力頻率的受迫振动，因此，代表这些振动的解可以写成复数的形式:

$$x_s=\overline{X}_s e^{ipt} \tag{82.2}$$

將(82.2)代入方程組(82.1)中，我們就得到确定振幅 $\overline{X}_s$ 的代数方程式:

$$\sum_{l=1}^{n}(\alpha_{sl}-p^2\beta_{sl})\overline{X}_l=F_s \tag{82.3}$$

$s=1, 2, \cdots, n$。解这些方程式，就得到受迫振动的复数振幅。

要分析無摩擦系統中受迫振动的情况，最好是用另一方法，把外力按正則振动分解，来求出受迫振动的振幅。

現在提出这样一个問題: 应当以怎样的方式来选取外力的振幅，才能使得受迫振动的振幅分布和頻率为 ω_j 的固有振动时的情形一样，換句話說，就是在这种振幅时受迫振动具有下列形式:

$$x_s=a_j k_{sj} e^{ipt}, \tag{82.4}$$

这里 k_{sj} 是頻率为 ω_j 的固有振动的分布系数。設外力是:

$$\Phi_s e^{ipt}. \tag{82.5}$$

將(82.4)和(82.5)代入基本方程組(82.3)，我們得到:

$$\sum_{l=1}^{n}(\alpha_{sl}-\beta_{sl}p^2)k_{lj}a_j=\Phi_s \tag{82.6}$$

$s=1,2,\cdots,n$。我們变更在方程(82.6)左边部分的和:

$$a_j\left[\sum_{l=1}^{n}\alpha_{sl}k_{lj}-p^2\sum_{l=1}^{n}\beta_{sl}k_{lj}\right]=\Phi_s \tag{82.7}$$

$s=1,2,\cdots,n$。

考虑到等式(75.1),則(82.7)可以写成:

$$a_j(\omega_j^2-p^2)\sum_{l=1}^{n}\beta_{sl}k_{lj}=\Phi_s \tag{82.8}$$

$s=1,2,\cdots,n$。从(82.8)可以看出,若在脚标为 s 的每个坐标上,作用一个振幅与

$$\sum_{l=1}^{n}\beta_{sl}k_{lj}$$

成正比的力,那末,在系統中就發生受迫振动,其頻率等于外力的頻率,并且关于坐标的振幅分布也和頻率为 ω_j 的固有振动时的情形一样。

本来在一般情形下,当作用在每个坐标上的力具有任意振幅 F_s 时,这些振幅的全体总可以分解为这样的和:

$$F_s=\sum_{j=1}^{n}f_j\sum_{l=1}^{n}\beta_{sl}k_{lj}. \tag{82.9}$$

在后面,我們要証明这个公式,現在讓我們来看看由它所推导出来的結果。

每一个力的振幅都是由对应于系統的固有振动的分量所組成,如果每一个坐标 x_s 只受一个力的分量的作用,也就是受下列力的作用

$$f_j\sum_{l=1}^{n}\beta_{sl}k_{lj}, \tag{82.10}$$

那末，根据(82.8)，受迫振动的振幅分布也和频率为 ω_j 的固有振动时的情形一样，并且振幅 a_j 等于:

$$a_j=\frac{f_j}{\omega_j^2-p^2}, \tag{82.11}$$

而受迫振动可以写成:

$$x_{sj}=a_jk_{sj}e^{ipt}=\frac{f_jk_{sj}}{\omega_j^2-p^2}e^{ipt} \tag{82.12}$$

$s=1, 2, \cdots, n$。当力以(82.9)的振幅作用时的一般情形中，受迫振动是由对应于一切脚标 j 的振动(82.12)的和所組成的。

$$x_s=\sum_{j=1}^{n}x_{sj}=e^{ipt}\sum_{j=1}^{n}\frac{f_jk_{sj}}{\omega_j^2-p^2}, \tag{82.13}$$

或者受迫振动(82.2)的振幅 X_s 等于:

$$X_s=\sum_{j=1}^{n}\frac{f_jk_{sj}}{\omega_j^2-p^2}. \tag{82.14}$$

从表达式(82.13)及(82.14)中，可以作出一系列的重要結論。如果外力的頻率等于某一个固有頻率，那末，所有坐标的振动振幅趋于無限大——發生共振振动；如果外力的頻率趋近于某一个固有頻率，那末，对应于这个頻率的振幅分量要比其余的分量占优势。因此，在这种情形下，受迫振动的振幅分布大致上和具該頻率的固有振动的情形一样。当系統中的阻尼不大时，这也是正确的。确定固有振动振幅分布的方法，就是以这为根据，这个方法的基本实質，就是引起对应于給定固有頻率的受迫共振振动，同时测量每个坐标的受迫振动的振幅。在分析受迫振动时，量 f_j 起着重要的作用，事实上，要想共振，不仅要有等式 $\omega_j=p$，而且还要条件 $f_j\neq 0$ 成立。如果外力的頻率等于固有頻率，但是量 f_j 等于零，那就不会共振，受迫振动的振幅的値是个有限値。

为了弄清楚量 f_j 的物理意义，我們根据已給定的 F_s 来求出

确定这些量的公式。以 k_{sm} 乘(82.9)的两边，同时，把它們按照 s 連加起来，即得：

$$\sum_{s=1}^{n} k_{sm}F_s = \sum_{s=1}^{n} k_{sm} \sum_{j=1}^{n} f_j \sum_{l=1}^{n} \beta_{sl}k_{lj}.$$

把右边求和的次序加以改变：

$$\sum_{s=1}^{n} k_{sm}F_s = \sum_{j=1}^{n} f_j \sum_{s,l=1}^{n} \beta_{sl}k_{lj}k_{sm}. \qquad (82.15)$$

注意到正交条件(75.6)以及"有效質量"的定义(76.2)，可以把(82.15)写成：

$$\sum_{s=1}^{n} k_{sj}F_s = \frac{1}{2} B_j f_j,$$

或者是

$$f_j = \frac{2}{B_j} \sum_{s=1}^{n} k_{sj}F_s. \qquad (82.16)$$

也可以反过来証明，如果(82.16)成立，那末，(82.9)也就成立。当然，这是在(75.6)和(76.2)的条件下的情况。

量 f_j 可以称为力 F_s 的全体在正则坐标上的"投影"。从(82.16)可以看出，当每个坐标的位移和在频率为 ω_j 时的固有振动的振幅成正比时，f_j 与这种情形下的外力的功成正比。因此 $f_j=0$ 就意味着：在共振($p=\omega_j$)时，外力的功等于零。

例題：試确定 §73 中研究过的那根弦的受迫振动，若在第一个小珠上作用一个力

$$F_0 \cos pt,$$

而其余的小珠不受力的作用，那末，由已經用过的符号，力的振幅等于：

$$F_1=F_0, \quad F_2=0, \quad F_3=0.$$

如果回忆起在这种情形的矩陣 k_{sj}(73.10)以及等效質量的大小(78.4)时，我們求得：

$$f_1=\frac{2}{m(5+\sqrt{5})}, \quad f_2=\frac{2}{m}, \quad f_3=\frac{2}{m(5-\sqrt{5})}.$$

因此，根据(82.13)，第一个坐标的受迫振动是：

$$x_1=\frac{2}{m}\left[\frac{1}{(5+\sqrt{5})(\omega_1^2-p^2)}+\frac{1}{\omega_2^2-p^2}+\frac{1}{(5-\sqrt{5})(\omega_3^2-p^2)}\right]\cos pt,$$

用同样的方法，可以写出第二个和第三个坐标的振动。

如果在第一个和第三个小珠上作用着两个这样的力，即

$$F_1=F_0\cos pt,\quad F_2=0,\quad F_3=-F_0\cos pt,$$

那么，不难算出：　$f_1=0$ 和 $f_3=0$.

这意味着，即使 p 是等于 ω_1 或 ω_3，在系統中也不会有共振。从淺显的概念出發，这也是很显然的。在这些频率时，两个坐标 x_1 及 x_3 作同相位的振动，而且振幅相同，但力的作用方向彼此相反，因此，一个力所作的功与另一个力所作的功相等，而符号相反，外力沒有作功，振动也就不会增長到無限大。

§83. 具多个自由度的系統在有摩擦情况下的受迫振动

用复数振幅方法来計算关于具多个自由度的系統在有摩擦的情况下的受迫振动，就原理方面說，并沒有任何复杂的地方，然而，随着自由度数的增多，計算会变得很繁瑣。現在来說明关于具多个自由度的系統中的受迫振动的一般理論，并指出它的某些重要特点。

当有阻尼存在，并且每个坐标都受频率 p 的外来正弦力作用时，倘若用前面(81.3)中用过的那种符号，便可把这种情形的运动方程式写为：

$$\sum_{l=n}^{n}(\beta_{sl}\ddot{x}_l+\gamma_{sl}\dot{x}_l+\alpha_{sl}x_l)=\overline{F}_s e^{ip}\qquad(83.1)$$

$s=1,2,\cdots\cdots,n$，这里 $\overline{F}_s$ 其所以是复数，是因为作用于每一个坐标上的那些力的相位一般是不同的。受迫振动具有下列形式：

$$x_s=\overline{X}_s e^{ipt},\qquad(83.2)$$

并且 $s=1,2,\cdots\cdots n$。为了确定振幅 $\overline{X}_s$，將(83.2)代入(83.1)中，我們便得到下列的方程組：

$$\sum_{l=1}^{n}(-\beta_{sl}p^2+i\gamma_{sl}p+\alpha_{sl})\overline{X}_l=\overline{F}_s. \qquad (83.3)$$

$s=1, 2, \cdots\cdots n$。假如用下式来代表方程組(83.3)的行列式，

$$D(ip)=|-\beta_{sl}p^2+i\gamma_{sl}p+\alpha_{sl}|, \qquad (83.4)$$

那末，方程組(83.3)的解是:

$$\overline{X}_s=\frac{\sum_{l=1}^{n}F_lD_{ls}(ip)}{D(ip)}, \qquad (83.5)$$

其中 $D_{ls}(ip)$是对应于行列式 $D(ip)$的第 s 行和第 l 列交叉点的元素的子式。

为了分析公式(83.5)，我們將(81.6)的行列式($D\lambda$)变换为下列形式:

$$D(\lambda)=C\prod_{s=1}^{n}(\lambda-\lambda_s)(\lambda-\lambda_s^*), \qquad (83.6)$$

这里，C 是常数，λ_s 是多項式 $D(\lambda)$的根，而 λ_s^* 是共軛根，根据(81.7)的定义，λ_s 代表系統的复数固有頻率。根当然可能是实根，也可能是重根，可是，我們暫时研究一般情形——所有的根都不相同，并且都是复数。当我們写出公式(83.6)时，已經把这考虑进去了。

假如用表示符号:

$$\lambda_s=-\delta_s+i\omega_s,$$

那末，

$$(ip-\lambda_s)(ip-\lambda_s^*)=(-p^2+ip2\delta_s+\delta_s^2+\omega_s^2)=$$
$$=\sqrt{(\overline{\omega}_s^2-p^2)^2+4\delta_s^2p^2}\cdot e^{i\varphi_s},$$

其中

$$\overline{\omega}_s^2=\omega_s^2+\delta_s^2, \quad \operatorname{tg}\varphi_s=\frac{2\delta_sp}{\overline{\omega}_s^2-p^2}.$$

因此，行列式

$$D(ip)=C\prod_{s=1}^{n}(ip-\lambda_s)(ip-\lambda_s^*)$$

可以写为下列形式:

$$D(ip)=Ce^{i\sum\limits_{s=1}^{n}\varphi_s}\prod_{s=1}^{n}\sqrt{(\bar{\omega}_s^2-p^2)^2+4\delta_s^2p^2}.$$

最后，假如將(83.5)式的分子的复数

$$\sum_{l=1}^{n}F_lD_{ls}(ip)$$

写成下列形式:

$$N_se^{i\vartheta_s}$$

那末，受迫振动振幅的公式(83.5)便是

$$\bar{X}_s=\frac{N_se^{i(\vartheta_s-\sum\limits_{l=1}^{n}\varphi_l)}}{C\prod\limits_{s=1}^{n}\sqrt{(\bar{\omega}_s^2-p^2)^2+4\delta_s^2p^2}}.\qquad(83.7)$$

現在来研究(83.7)，便可以看出共振的依存关系。不論 p 为何値，都不能使分母变为零，即受迫振动不会有無穷大的振幅。假如所有的 ω_s 彼此相差很远，而阻尼系数 δ_s 又足够小，那末，当 $p\approx\omega_s$ 时，共振巔値將明显地表現出来。也就是，在这一頻率时，所有坐标的振动振幅会有很大的値。对于不同坐标来說，相位差是不相同的。

假如 δ_s 的値非常小，那末，由公式(83.7)所求出的値会接近于由(82.14)求出的値，因此，在共振附近受迫振动振幅的分布，和同一頻率的固有振动的振幅分布几乎是一样的。当阻尼系数 δ_s 的値比較大时，便完全不是这样，在共振时的振幅分布和固有振动的振幅分布完全沒有相似之处。

应該注意，就是在(83.6)的行列式 $D(\lambda)$ 可能有实数根的情形下，公式的形式还是不会改变，改变的仅仅是根的記数法。假如給

每个复数根一个它自己的号碼，并按所有的脚标由 1 算到 $2n$，那末公式的根的記数法就有規則了。

§ 84. 同样环节(元件)的"鏈"

所謂同种环节的"鏈"，是由一些互相耦合的同样元件串联而成的一种系統，其中每个元件都是具一个自由度的振动系統。用这种鏈能够挑选出(或者截去)对应于某一頻帶的振动，在这种情形下的鏈称为濾波器。

下面举一些鏈的例子：

1) 低頻濾波器　由同样的綫圈和同样的电容器組成如圖 207 所示的鏈，是一个低頻濾波器。不难看出，假如有某一頻率的电动势作用于鏈的一端，而我們在鏈的另一端測电压，那末，电压的振动振幅会随着頻率的增高而下降。这种鏈仅讓低頻"通过"。

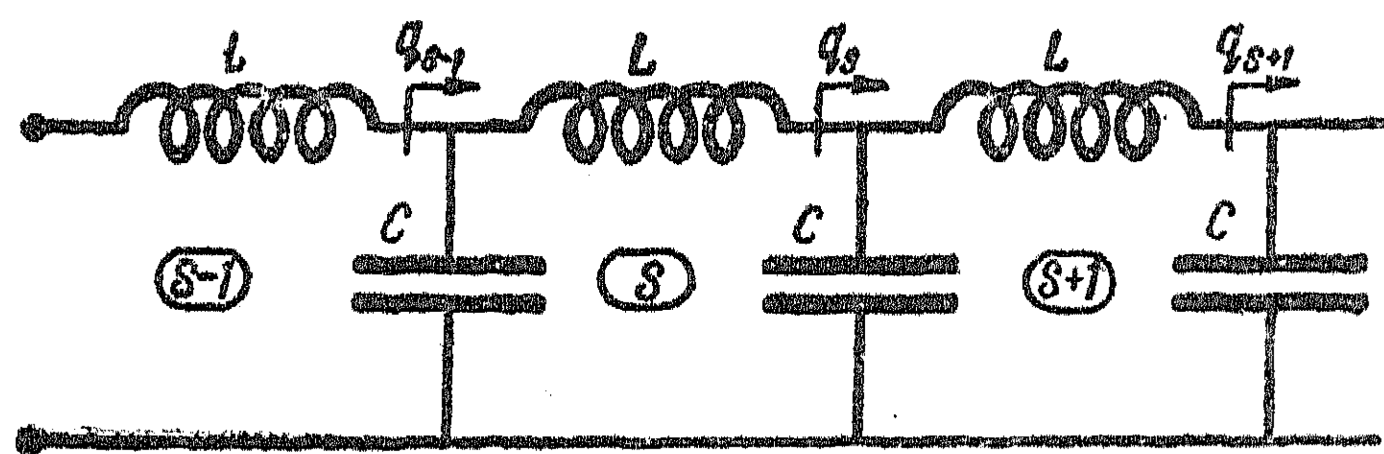


圖 207.

假如写出关于磁能和电能的表达式，便不难建立鏈中固有振动的方程式。假設用 q_s 来代表在瞬間 t 流过第 s 个綫圈截面的电荷，同时假定当 $t=0$ 时，所有的 $q=0$。那末，低頻濾波器的能量表达式，显然可以写为：

$$2T=\sum_{s=1}^{n} L\dot{q}_s^2,\quad 2U=\frac{1}{C}\sum_{s=1}^{n-1}(q_{s+1}-q_s)^2. \qquad (84.1)$$

在机械上，有一种东西跟低頻濾波器类似，那就是由一些同样的質量和彈簧沿一根直綫串联而成的鏈，各質量等于 m，各彈簧的剛度系数等于 k (圖 208)。当然，在这种情形下，我們只研究質量沿鏈

的縱振动。假如用 q_s 代表第 s 个質量的位移，那末，位能和动能將具有下列形式：

$$2T=\sum_{s=1}^{n}m\dot{q}_s^2,\quad 2U=k\sum_{s=1}^{n-1}(q_{s+1}-q_s)^2.\qquad(84.2)$$

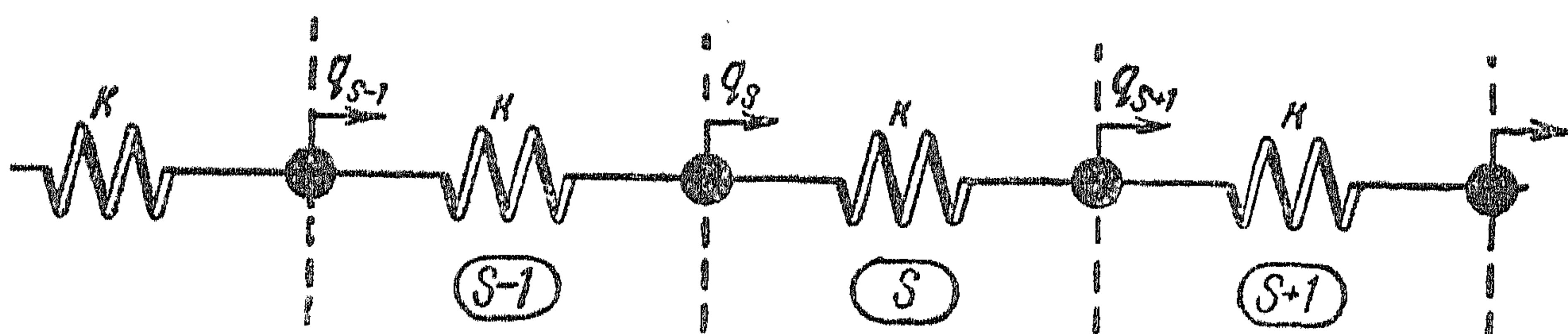


圖 208.

由此可見，当这样选擇坐标时，在圖 207 和圖 208 的鏈中，將按照完全同样的規律發生振动。要注意到，許多同样的小珠，依等距离附在一根弦上，就構成这种类型的鏈。

2）高頻濾波器　这种鏈由一些同样的元件組成，并且像圖 209 那样連接起来。显然，这种濾波器將截去低頻率。

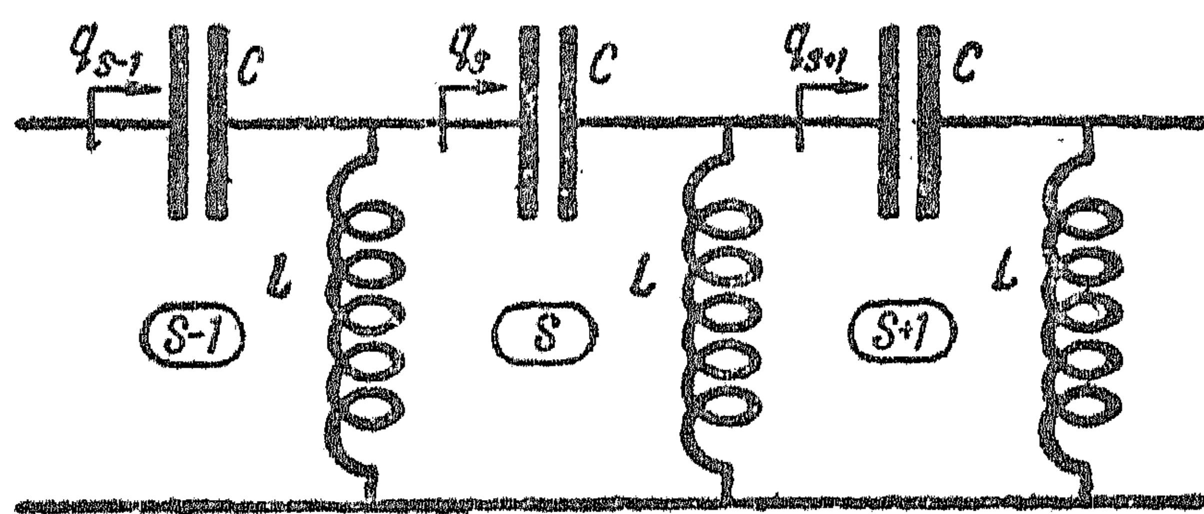


圖 209.

將电容器上的电荷 q_s 选作坐标，那末，鏈的磁能和电能將是：

$$2T=L\sum_{s=1}^{n-1}(\dot{q}_{s+1}-\dot{q}_s)^2,\quad 2U=\frac{1}{C}\sum_{s=1}^{n}q_s^2.\qquad(84.3)$$

在这种情形下，在鏈的各个元件之間存在着磁耦合，这和前面（84.1）的情形不同，在前一情形中是电耦合。

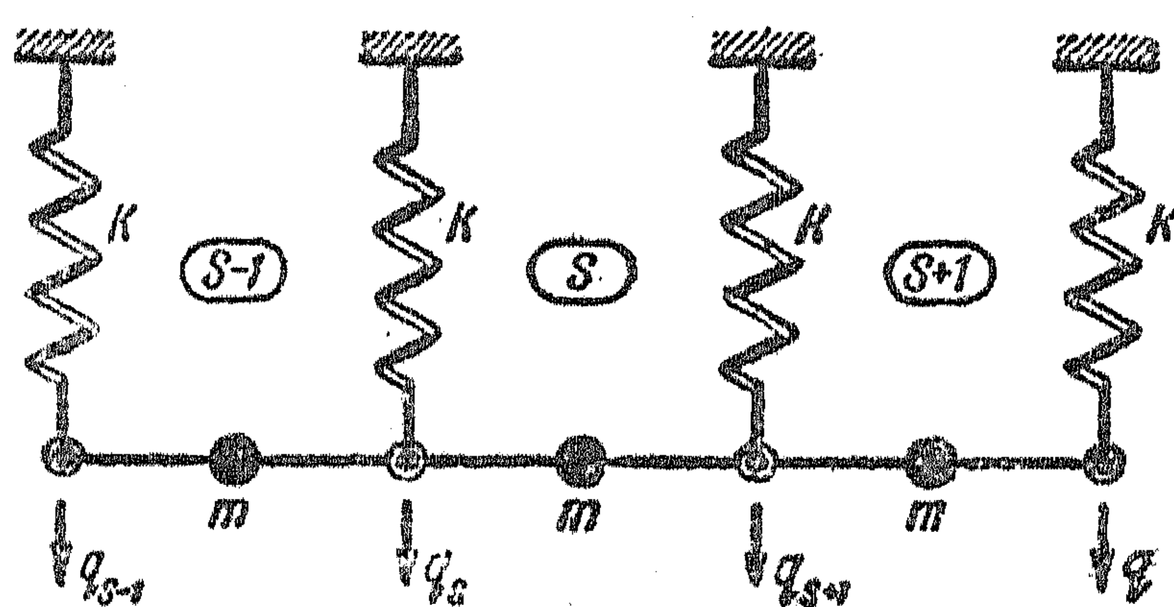


圖 210.

在机械学上，圖 210 所示的鏈跟高頻濾波器类似，这种鏈，由一些“無重量的”杆所組成，这些杆悬在同样的彈簧上，

在每个杆的中部，都固定着一个同样的小質量 m，杆是由鉸鏈連接在一起的。我們仅仅研究彈簧的竪直振动。

假如用 q_s 來代表彈簧末端的位移坐标，那末，动能和位能便可以写为：

$$2T=m\sum_{s=1}^{n-1}(\dot{q}_{s+1}-\dot{q}_s)^2,\quad 2U=k\sum_{s=1}^{n}q_s^2 \qquad (84.4)$$

能量表达式的形式跟（84.3）式一样。在本例，机械鏈的各元件之間具有慣性耦合。

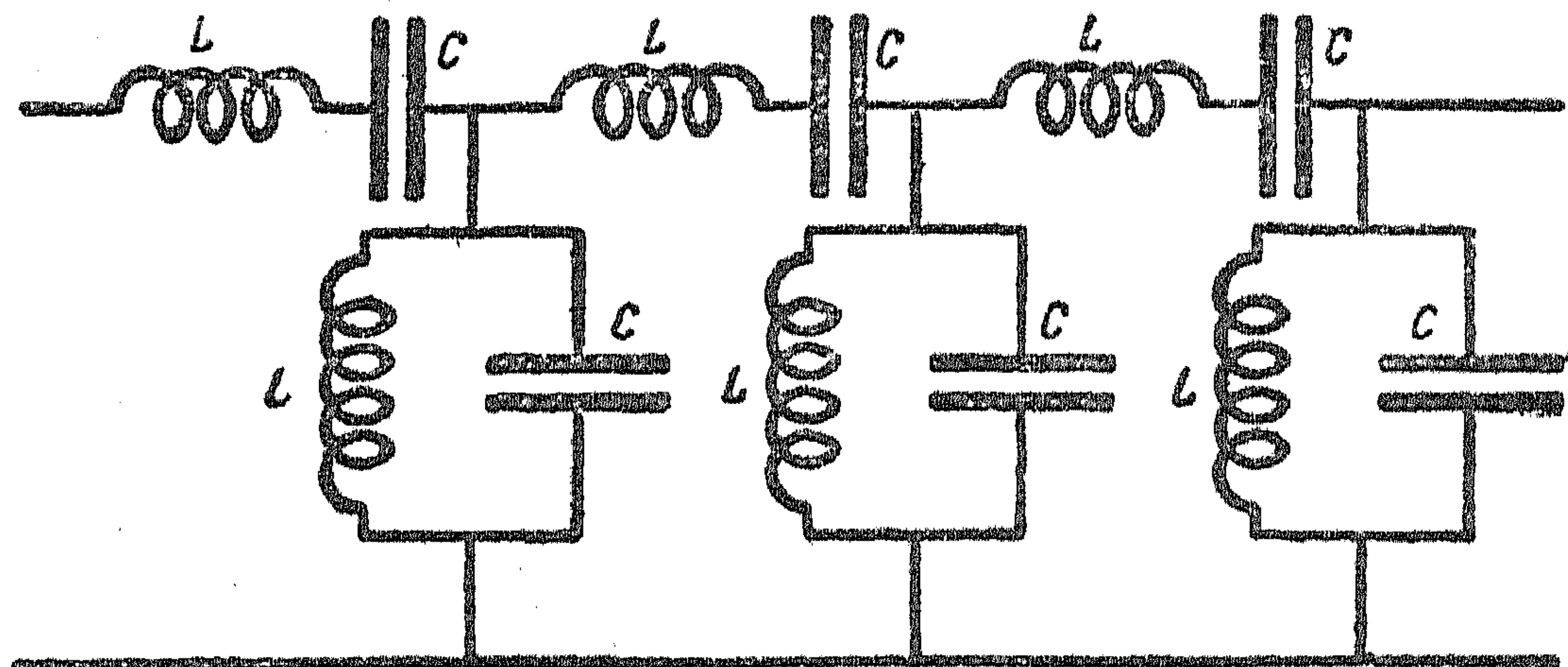


圖 211.

还有一种濾波器也常常用到，这种濾波器是另一种类型的鏈。例如，所謂通帶濾波器，这是由圖 211 所示的那种类型的元件組成的。这种濾波器可讓 $\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ 附近的頻帶通过。

关于在濾波器中的振动理論，在所有的情形下，就原理説都是一样的，因此，在下一节中，我們只分析最簡單的低頻濾波器中的振动。

§85. 均匀元件的鏈中的固有振动

我們来研究由 $n+1$ 个元件所組成的鏈中的固有振动。取一低頻濾波器（圖 207 或 208）。当引用前一节中用过的符号时，对于任何第 s 个环节而言，在这种鏈中的振动方程式可以写为：

$$L\ddot{q}_s+\frac{1}{C}(2q_s-q_{s+1}-q_{s-1})=0. \tag{85.1}$$

仅仅第一个环节和最后一个环节的方程式会有所不同,例如,如果鏈的兩端是开路的,那末

$$q_1=0, \quad q_{n+1}=0; \tag{85.2}$$

如果鏈的兩端接有电容器 C_1 和 C_2, 那末, 关于第一个網目的方程式是

$$L\ddot{q}_1+\frac{1}{C}(q_1-q_2)+\frac{q_1}{C_1}=0, \tag{85.3}$$

而关于最后一个即第$(n+1)$个網目的方程式为:

$$L\ddot{q}_{n+1}+\frac{1}{C}(q_{n+1}-q_n)+\frac{q_{n+1}}{C_2}=0. \tag{85.4}$$

令方程式(85.3)和(85.4)中的 $C_1\to 0, C_2\to 0$, 可以得出(85.2)。这样使电容变为零,就相当于鏈的兩端开路。当鏈的兩端短路时,关于第一个和最后一个环节的方程式也可以由(85.3)和(85.4)中得出, 这时是令其中的 $C_1\to\infty, C_2\to\infty$。鏈的兩端还可能具有不同的条件,例如,一端短路,而另一端接有电感 L_0。

我們只詳細分析当兩端網目的方程式具有(85.3)和(85.4)形式的情形,也就是只分析当鏈的兩端接有 C_1 和 C_2 时的固有振动。

在鏈中的正則振动可以写为:

$$q_s=a_s\cos(\omega t+\varphi), \tag{85.5}$$

其中 ω 是未知数, 它是系統的一个固有頻率。將(85.5)代入(85.1),我們得到关于确定振幅 a_s 的方程組:

$$(-LC\omega^2+2)a_s-a_{s+1}-a_{s-1}=0, \tag{85.6}$$

其中 $s=2, 3, \cdots, n$。可以求出下列形式的这一方程組的解:

$$a_s=Ae^{s\beta}, \tag{85.7}$$

其中 A 和 β 都是常数,其实,將(85.7)代入方程組(85.6),就得到关于确定 β 的下列方程式·

$$1-\frac{1}{2}\omega^2 LC=\text{ch }\beta. \tag{85.8}$$

随着$\left(\frac{1}{2}\omega^2 LC\right)$这个量是大于1或者小于1，这一方程式的解將具有不同的形式。

假如$\left(\frac{1}{2}\omega^2 LC\right)<1$，那末，$\beta$ 將是純虛数。令$\beta=\pm i2\gamma$，那末，$\text{ch }\beta=\text{ch }(\pm i2\gamma)=\cos 2\gamma$，將它代入(85.8)便得到：

$$1-\frac{1}{2}\omega^2 LC=\cos 2\gamma,$$

$$1-\cos 2\gamma=2\sin^2\gamma=\frac{1}{2}\omega^2 LC;$$

由上式得
$$\omega^2 LC=4\sin^2\gamma$$

最后得
$$\omega\sqrt{LC}=2\sin\gamma. \tag{85.9}$$

因此，方程式(85.9)表明着γ和ω两个量的关系。从而，关于振幅的方程式(85.7)可以写为：

$$a_s=Ae^{i2s\gamma}+Be^{-i2s\gamma}, \tag{85.10}$$

这里A及B在目前是任意常数。

如果$\left(\frac{1}{2}\omega^2 LC\right)>1$，那末，在(85.8)中，量$\beta$是一个复数。令$\beta=\mu+i\nu$，于是根据(85.8)，便有：

$$1-\frac{1}{2}\omega^2 LC=\text{ch }\beta=\text{ch }(\mu+i\nu)=\text{ch }\mu\cos\nu+i\text{ sh }\mu\sin\nu. \tag{85.11}$$

因为在(85.11)的左边是一个負实数，因此$\nu=\pi$，而量μ可以由(85.11)这样地来确定：

$$\text{ch }\mu=\frac{1}{2}\omega^2 LC-1. \tag{85.12}$$

在这种情形下，各个坐标振幅的値可以写成：

$$a_s=e^{is\pi}(A_1e^{s\mu}+B_1e^{-s\mu}),$$

或者
$$a_s=(-1)^s(A_1e^{s\mu}+B_1e^{-s\mu}), \tag{85.13}$$

这里A_1及B_1都是常数。

对于某个固有頻率 ω 来說，关于各个坐标的振幅分布参数 γ (或 μ)是由方程式(85.9) 或 (85.12)来确定的，每一个方程式中都含有兩个未知数(ω 和 γ, 或是 ω 和 μ)。由鏈兩端的环节的条件，例如由(85.2), (85.3)以及 (85.4) 等等，我們可以得出一对补助方程式，这对方程式表明着这兩个量之間的关系。

当鏈的起端連有电容器 C_1，而末端連有电容器 C_2 时，便得到一般情形的方程式。在前面，已經写出了关于第一个網目的方程式(85.3)，以及关于最后第 $n+1$ 个網目的方程式(85.4)。將(85.5)的諧解代入(85.3)和(85.4)中，我們得到:

$$\left(1-\omega^2LC+\frac{C}{C_1}\right)a_1=a_2,$$
$$\left(1-\omega^2LC+\frac{C}{C_2}\right)a_{n+1}=a_n. \tag{85.14}$$

引用符号:

$$\alpha_1=1-\omega^2LC+\frac{C}{C_1},\quad \alpha_2=1-\omega^2LC+\frac{C}{C_2}, \tag{85.15}$$

幷把(85.10)中的振幅代入(85.14)中，进行变换，就得到:

$$A(\alpha_1e^{i2\gamma}-e^{i4\gamma})+B(\alpha_1e^{-i2\gamma}-e^{-i4\gamma})=0,$$
$$A(\alpha_2e^{i2\gamma(n+1)}-e^{i2\gamma n})+B(\alpha_2e^{-i2\gamma(n+1)}-e^{-i2\gamma n})=0.$$

关于 A 和 B 的齐次方程組仅仅在下列条件下，才有非零解:

$$(\alpha_1e^{i2\gamma}-e^{i4\gamma})(\alpha_2e^{-i2\gamma(n+1)}-e^{-i2\gamma n})=$$
$$=(\alpha_1e^{-i2\gamma}-e^{-i4\gamma})(\alpha_2e^{i2\gamma(n+1)}-e^{i2\gamma n}). \tag{85.16}$$

我們注意到: 在(85.16)中，等号的一边是另一边的共軛复数，因此，它們的每一个都代表一个实数。由此可見，

$$(\alpha_1e^{i2\gamma}-e^{i4\gamma})(\alpha_2e^{-i2\gamma(n+1)}-e^{-i2\gamma n})$$

的虚数部分应該为零，这就給出了表明着 γ 和 ω 关系的第兩个方程式。它具有下列形式:

$$\alpha_1\alpha_2 \sin 2\gamma n-(\alpha_1+\alpha_2) \sin 2\gamma(n-1)+ \sin 2\gamma(n-2)=0. \tag{85.17}$$

假定振动的振幅分布具有(85.13)型的指数規律，則用完全类似的方法可以得到表明量μ和ω关系的方程式，

$$\alpha_1\alpha_2 \operatorname{sh} \mu n-(\alpha_1+\alpha_2) \operatorname{sh} \mu(n-1)+ \operatorname{sh} \mu(n-2)=0 \tag{85.18}$$

这个方程式与(85.17)类似，它不过是用双曲綫函数来代替其中的三角函数。

当解联立方程式(85.9)及(85.17)时，我們可以求出固有頻率，以及对应于它們的γ値。然后將(85.12)与(85.18)一起求解，我們可以求出其余的ω値，以及与它們对应的量μ。

由兩个方程式来确定鏈中振动的固有頻率，說明了固有頻率不仅与組成鏈的網目的参数有关，而且与鏈兩端的条件也有关系，同样的鏈，在兩端条件不同时，会具有不同的固有頻率。

实际上，必須用圖解法来解关于确定頻率的方程式，同时，要研究它的一般情形，是相当繁瑣的①。

因此，我們只分析一种情形的固有振动，即对应于兩端开路的低頻濾波器的鏈中的固有振动。在这种情形下，正如我們所指出过的，应該令C_1和C_2为零，同时根据(85.15)有：

$$\alpha_1\to\infty, \quad 及 \quad \alpha_2\to\infty.$$

于是，方程式(85.17)变成：

$$\sin 2\gamma n=0; \tag{85.19}$$

上式的解是：

$$2\gamma=0,\ \frac{\pi}{n},\ \frac{2\pi}{n},\cdots,\frac{s\pi}{n}. \tag{85.20}$$

因此，根据(85.9)，鏈的固有頻率由下列公式来确定：

---

① 克拉斯努斯金和B. B. 波秋金首先詳細探討和研究了对应于解(85.18)的固有振动。

$$\omega_s=\frac{2}{\sqrt{LC}}\sin\frac{s\pi}{2n}. \tag{85.21}$$

在圖 212 中，清楚地表明了固有頻率之間的关系，在这圖中，是將半徑为 $\frac{2}{\sqrt{LC}}$ 的四分之一个圓周分成 n 个部分，同时，頻率的大小，等于通过弧上这些分点的半徑的投影。在圖 212 中表明了由六个網目所組成的系統的頻率。轉过来再看看圖 207，就可以看出：在这种場合中，$q_1=q_{n+1}=0$，因此，系統只具有 $n-1$ 个自由度，也就是說当 $n=6$ 时，系統具有五个自由度。事实上，像圖 208所示的，含有六个元件并在兩端固定的那种机械鏈，形式如圖213；这里第一个和第七个質量是固定的，而鏈只有五个可动的質量，有五个自由度。在这种情形下，根据(85.20)，振动振幅(85.10)將是

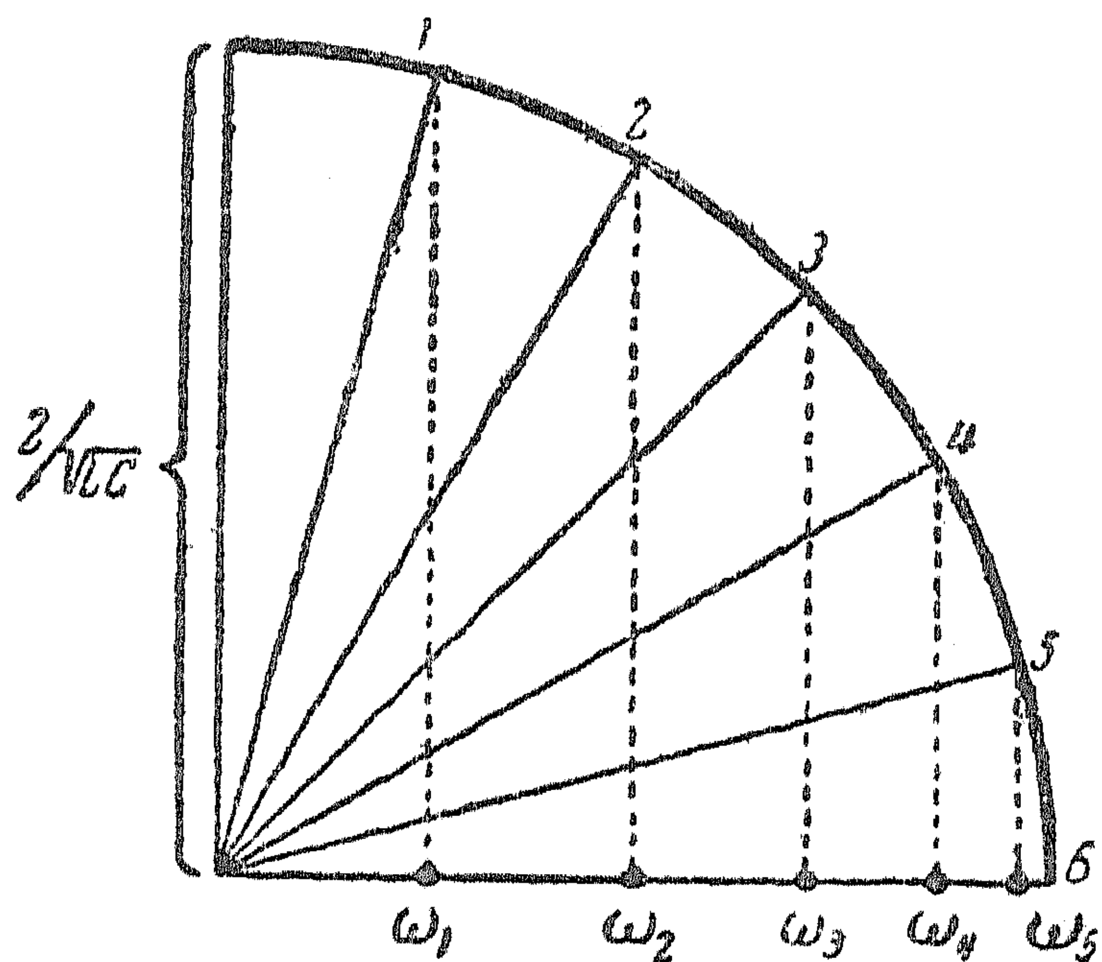


圖 212.

$$a_{ls}=A_se^{i\frac{ls\pi}{n}}+B_se^{-i\frac{ls\pi}{n}}. \tag{85.22}$$

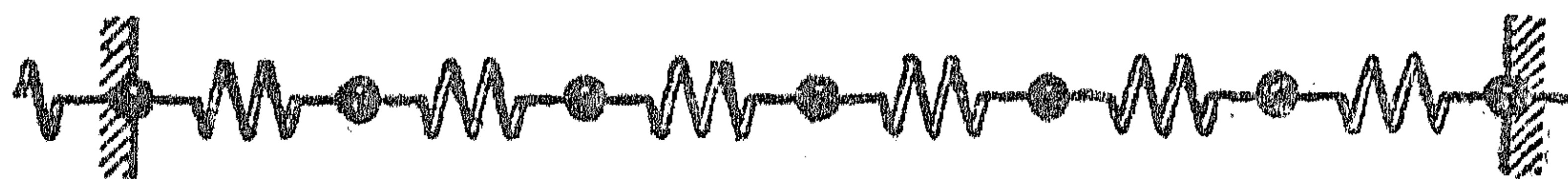


圖 213.

由条件 $q_1=0$ 或是 $a_{ls}=0$ 推出 $A_s=-B_s$；因此，(85.22)可以写成这样：

$$a_{ls}=D_s\sin\frac{sl\pi}{n}, \tag{85.23}$$

上式中，$D_s=i2A_s$，l 是網目的号碼，s 是固有頻率的号碼。最后，設鏈由 n 个元件組成，并且兩端是断开的，根据(85.5)及(85.23)，

在任何起始条件下，这鏈中的固有振动，可以写为：

$$q_l=\sum_{s=1}^{n-1} D_s \sin\frac{sl\pi}{n}\cdot\cos(\omega_s t+\varphi_s), \tag{85.24}$$

这里ω_s由(85.21)来确定，s的値由1到$n-1$。振幅D_s及相位φ_s的大小由鏈的起始狀态来确定。我們給定了每个元件的q_{0l}及$\dot{q}_{0l}$的値，那末，D_s及φ_s的大小便由下列$2(n-1)$个方程式来确定：

$$q_{0l}=\sum_{s=1}^{n-1} D_s \sin\frac{sl\pi}{n}\cos\varphi_s,$$

$$\dot{q}_{0l}=-\sum_{s=1}^{n-1} D_s\omega_s \sin\frac{sl\pi}{n}\sin\varphi_s. \tag{85.25}$$

对于每一个固有頻率而言，其沿各元件的振幅分布是依照正弦規律分布的。在所有網目中，坐标作同相位或者反相位的振动。任何的固有振动，都是一些具固有(正則)頻率的諧振动的总和。

設有一含有六个元件的鏈，它的兩端固定着，如圖213所示，关于这种鏈中的每个固有振动的振幅分布，見圖214。对于頻率为$\omega_1=\frac{2}{\sqrt{LC}}\sin(\pi/6)$的振动来說，所有質量在某一瞬間的歧离，与各段正弦波成正比，而且沿鏈分布着半个正弦波，在所有元件中振动是同相位的。我們要記得，q_l代表在机械鏈中的位移，或者代表在电学濾波器中的电荷，因此，电流$\dot{q}_l$的振幅分布和圖214所示的电荷的振幅分布，具有完全一样的形式。

关于其余的四个頻率的振幅分布，也表明在这个圖中——固有頻率的号碼是多少，便有多少个"半波"沿鏈分布着。

要注意到，在公式(85.21)中，我們过去只將s値取到$n-1$为止，如果令$s=n$，那么还可以得到等于$2/\sqrt{LC}$的"頻率"，然而，根据(85.20)，这一頻率的2γ等于π，因此，对于这个"頻率"而言，

所有坐标的振幅(85.23)都等于零，从而在物理上，这个"頻率"是沒有意义的。由下面的推理，可以得出同样的結論，就是既有$n-1$个自由度，我們已經得到了$n-1$个頻率，因此，不会有更多的固有頻率了。即使令公式(85.21)中的$s>n$，我們所求得的固有頻率的值还是这些值。

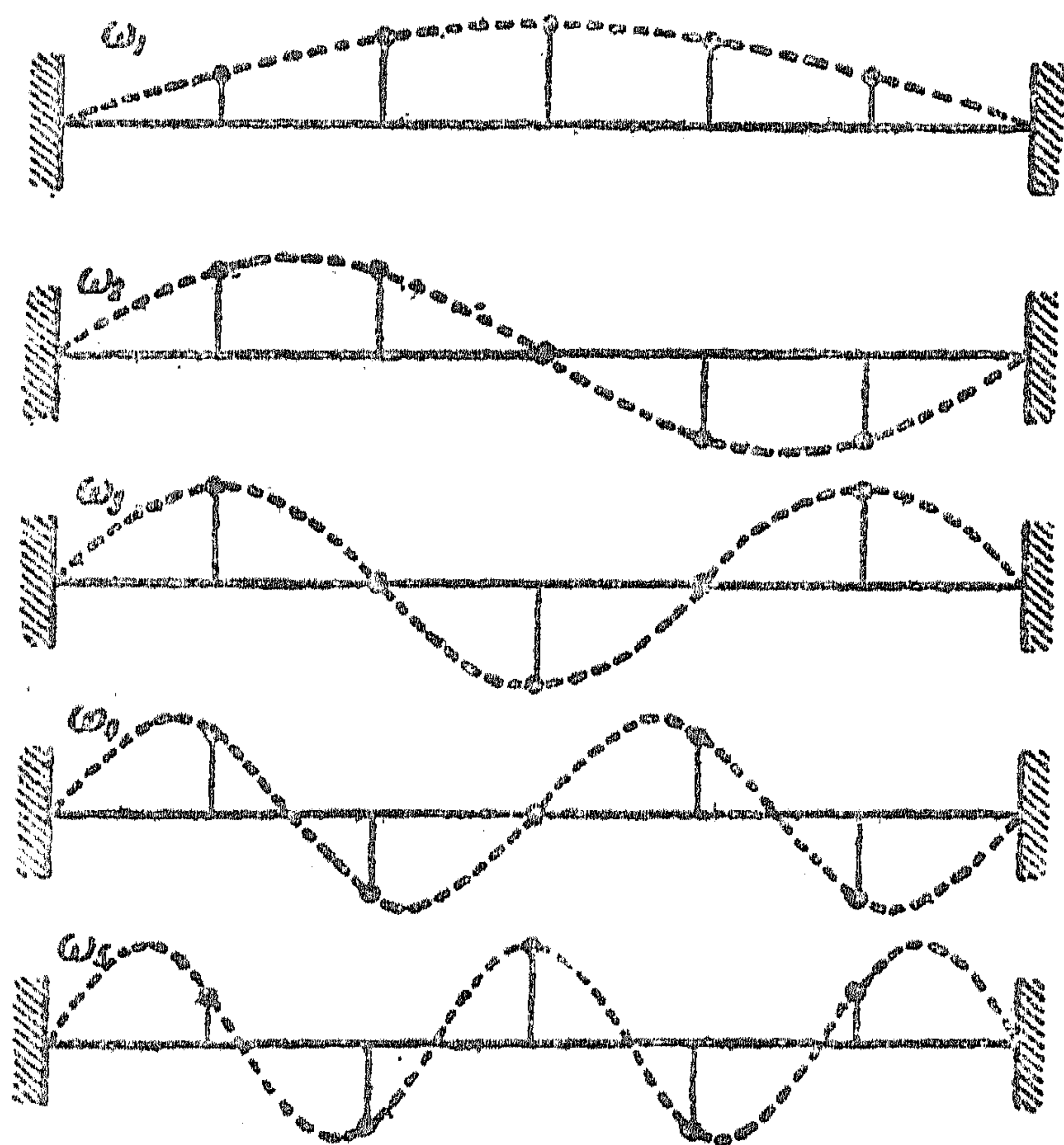


圖 214.

显然，这种情形中，沒有必要由公式(85.13)，(85.12)和(85.18)去求对应于指数分布振幅的頻率。但是，如果作出了計算，那末会得到，$\mu=0$，和$\omega=2/\sqrt{LC}$；正如上面說过的，这就表明振幅作指数的分布的固有振动是不可能發生的。

而在一般情形中，往往既有必要从方程式(85.9)和(85.17)中去求振幅作正弦分布的固有頻率，又有必要从方程式(85.12)和(85.18)中去求振幅作指数分布的固有頻率。

§86. 均匀元件的鏈(濾波器)中的受迫振动

設有一个鏈，其各元件均匀，外电动势作用于它的第一个網目，振动由最后一个網目傳送出去，在这种情况下，因为有某些頻率的振动"不能通过"这种鏈，所以这种鏈称为濾波器。

因此，濾波器的計算，是以一端受外电动势作用的鏈的受迫振动理論为根据的。現在来研究低頻濾波器在空載时的受迫振动(圖 215)。

假如有下列电动势作用于"鏈"的第一个环节上，

$$\mathscr{E}=\mathscr{E}_0 e^{ipt},$$

我們来研究这"鏈"末端的电压振动 V_k 的振幅和相位。

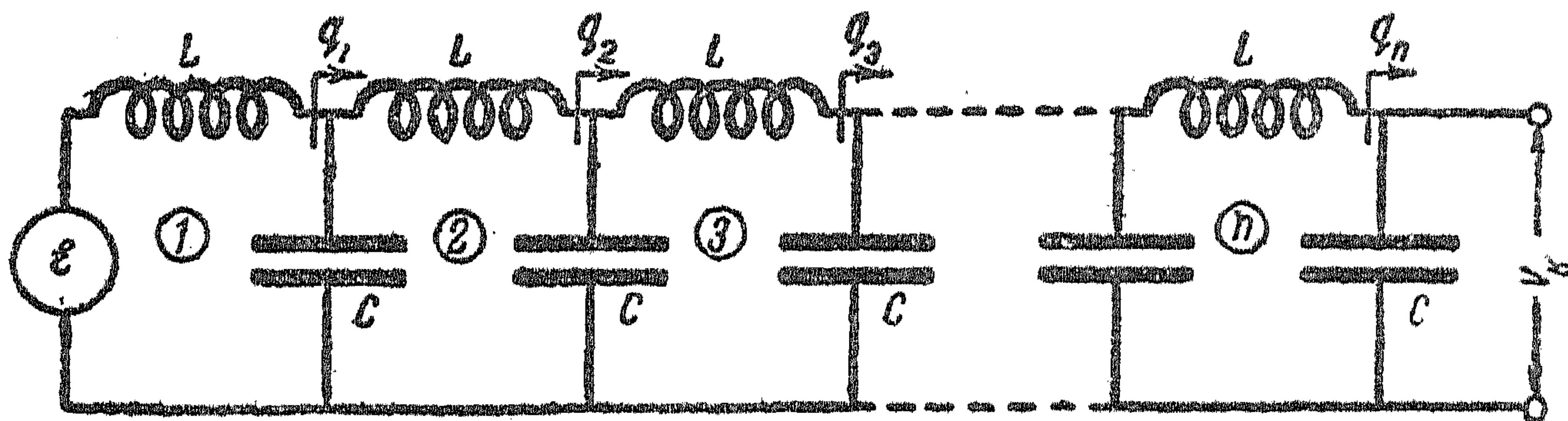


圖 215.

关于鏈的每一个环节的电荷振动的方程式，跟固有振动时的方程式［即方程式(85.1)］形式相同。最后一个环节的条件，跟条件（85.2）一样。仅仅鏈的第一个环节的电荷振动方程式有所不同，这个方程式是

$$L\ddot{q}_1+\frac{1}{C}(q_1-q_2)=\mathscr{E}_0 e^{ipt}. \tag{86.1}$$

未知电压 V_k 显然等于 q_n/C，因此，如果我們求出了 q_n，那末便已經完成了空載濾波器的計算。

仿照固有振动的情形，我們假設：通过每个網目的电感的电荷，其受迫振动与它的号碼具有下列关系：

$$q_l=Ae^{\lambda l}e^{ipt}. \tag{86.2}$$

將这个关系式代入（85.1），并用 Ae^{ipt} 来除，就得到确定未知量 λ 的方程式：

$$LCp^2-2+e^{\lambda}+e^{-\lambda}=0,$$

或者，采用符号：$LCp^2=\alpha^2$，就可以把上式写作：

$$\operatorname{ch}\lambda=1-\frac{\alpha^2}{2}. \tag{86.3}$$

根据定义，α^2 是正实数，由此，如果

$$\alpha^2>2 \tag{86.4}$$

那末，λ 是一个純虚数。令 $\lambda=i\beta$，則 $\operatorname{ch}\lambda=\cos\beta$，同时，(86.3)可

以写成:

$$\cos\beta=1-\frac{\alpha^2}{2}. \qquad (86.5)$$

这个超越方程式具有無限多組解，但只有 $\pm\beta_1$ 才有意义，这是因为其余的根与它們相差 2π。圖 216 說明用圖解法求方程式 (86.5) 的根。

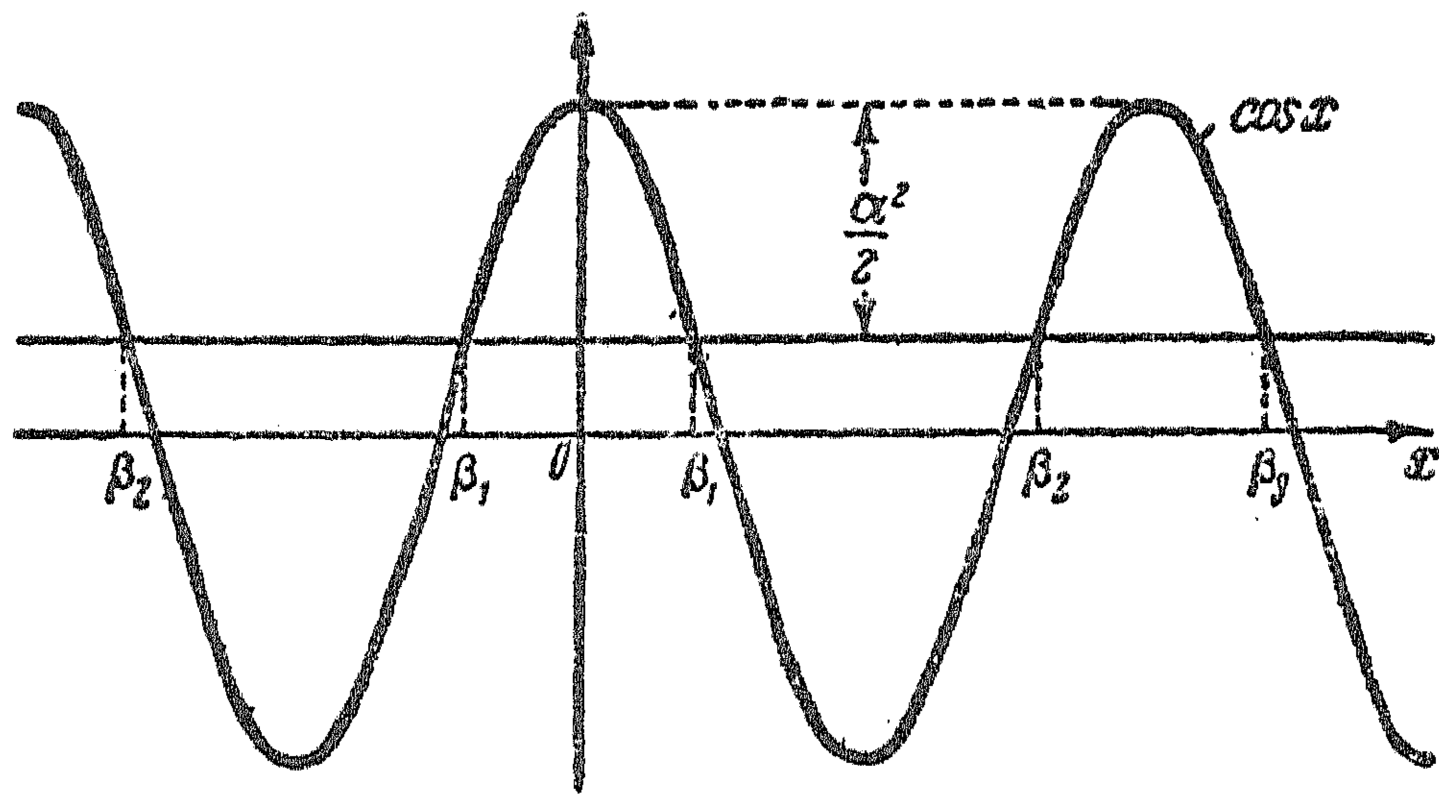


圖 216.

在脚标为 l 的环节中，电荷的受迫振动的复数形式是:

$$q_l=Ae^{i(l\beta_1+pt)}+$$
$$+Be^{i(-l\beta_1+pt)}.$$

如果 $\mathscr{E}=\mathscr{E}_0\cos pt$，那末，

$$q_l=(Ae^{i\beta_1 l}+Be^{-i\beta_1 l})\cos pt; \qquad (86.6)$$

由于这个量应該是一个实数，那末

$$A=A_1e^{i\varphi},\quad 而\quad B=A_1e^{-i\varphi}.$$

因此，

$$q_l=2A_1\cos(\beta_1 l+\varphi)\cos pt=$$
$$=A_1[\cos(pt+B_1l+\varphi)+\cos(pt-\beta_1 l-\varphi)]. \qquad (86.7)$$

鏈中的受迫振动具有“正弦分布的振幅”，也就是說，在每一个網目中，振幅与余弦成正比，这余弦的幅角每經过一个網目，便作一定大小 (β_1) 的变化。这样的振动很像在具有分布参数的媒質中的“駐波”。

鏈中的振动还可以这样来表征，每一个網目中的振动，由兩个同一频率 p 的分量組成，每經过一个元件，一个分量的相位突然增加，另一个分量的相位突然減少，增減的数量一样。我們所考慮的整个鏈中的每一个分量，很像在連續媒質中的“行波”，惟一不同的地方，是振动的相位是突变的。

应該这样来选擇任意常数 A 及 B (或 A_1 及 φ)，使得能滿足在

第一个網目的方程式(86.1),以及鏈末端的条件 $q_{n+1}=0$。对于(86.7)的解而言,如果相位等于:

$$\varphi=\frac{\pi}{2}-\beta_1(n+1), \qquad (86.8)$$

条件 $q_{n+1}=0$ 便能滿足。將(86.7)代入(86.1)中,我們便求出了电荷振动的振幅:

$$2A_1=\frac{\mathscr{E}_0 C}{(1-\alpha^2)\cos(\beta_1+\varphi)-\cos(2\beta_1+\varphi)}.$$

如果將(86.8)中的相位 φ 的値代到这里,并作变換,那末,就得到:

$$2A_1=\frac{\mathscr{E}_0 C}{(\alpha^2-1)\sin\beta_1 n+\sin\beta_1(n-1)}. \qquad (86.9)$$

我們注意到,根据(86.7),在第一个網目中的电荷的振动振幅等于

$$2A_1\cos(\beta_1+\varphi),$$

因此,在第一个網目中,电流的振动振幅等于:

$$I_{01}=2A_1 p\cos(\beta_1+\varphi)=2A_1 p\sin\beta_1 n. \qquad (86.10)$$

电流的振动导前于电荷的振动 $\frac{\pi}{2}$,电动势的振幅与流过电动势源的电流振幅的比値,称为濾波器(鏈)的輸入阻抗。我們把輸入阻抗記作

$$W=\frac{\xi_0}{I_{01}}, \qquad (86.11)$$

再由(86.9)及(86.10)中消去 A_1,就得到低頻濾波器的輸入阻抗:

$$W=\frac{(\alpha^2-1)\sin\beta_1 n+\sin\beta_1(n-1)}{pC\sin\beta_1 n}. \qquad (86.12)$$

根据(86.7),在濾波器輸出端的电压振幅的大小等于:

$$V_k=\frac{q_n}{C}=2A_1\cos(\beta_1 n+\varphi), \qquad (86.13)$$

或者,由(86.13)中消去 φ 及 A_1,根据公式(86, 8)及(86.9)我們得到:

$$\frac{V_k}{\xi_0}=\frac{\sin\beta_1}{(\alpha^2-1)\sin\beta_1 n+\sin\beta_1(n-1)}. \qquad (86.14)$$

这就是我們感兴趣的低頻濾波器的傳輸系数,根据(86.5),把对应

于各种 p 値的 β_1 的値代到这里，就得到濾波器傳輸系数与頻率的关系。

由公式(86.12)看到：当 $\sin\beta_1 n=0$ 时，濾波器的輸入阻抗 W 是無限大。比較(85.9)及(86.5)，并考虑到(85.19)时，我們就可以断言，当外电动势的頻率 p 等于兩端断开的鏈的回路的某个固有頻率时，$W\to\infty$，在这种情形下，濾波器的輸入端代表一个理想的絶緣体，而系統中会發生阻抗共振，这个共振与我們在 §17 中所硏究过的完全相似。当阻抗共振时，在鏈中發生这样的固有振动，这时，在兩端开放的鏈的輸入端，其电压的振动振幅等于外电动势的振幅。它們的相位也相同；在鏈的所有环节中，以及在濾波器輸出端，振幅一般都具有有限値。

如果仿照"电流共振"(§17)时那样，即用电流源来代替电动势源，給定了第一个網目电路的电流，那末，情形就会完全兩样。这时，当 $W\to\infty$ 时，在鏈中会發生具有無限大振幅的振动，也就是会發生共振振动，这一点，从公式(86.10)中可以看到：当 I_{10} 大小有限，而 $\sin\beta_1 n\to 0$ 时，量 $A_1\to\infty$。在机械鏈中，假若給定的不是力，而是第一个質量的位移，那末，当頻率对应于动剛度共振时，振幅也就会是無限大。

因此，在發生輸入阻抗共振时，也就是在頻率 p 的大小可使 $W\to\infty$ 时，如果給定电动势，則在系統中的振幅不会是無限大。不过，如果有这样的作用，以致第一个元件中的电流为給定値，那末，在这些頻率 p 时，振动会具有無限大的振幅，会有振动的共振。

現在，我們来确定外电动势的这种頻率，在这些頻率时，輸入阻抗 W 变为零；这就表示：在这些頻率时，第一个網目以及其余的網目中的电流会是無限大。这种情况表征在濾波器中的共振振动。比較(86.12)和(86.14)，我們看到，当 $W\to 0$ 时，輸出端的电压 $V_k\to$ $\to\infty$。

我們来确定共振振动的頻率。从（86.12）推出，在共振頻率时，

$$(\alpha^2-1)\sin\beta_1 n+\sin\beta_1(n-1)=0. \qquad (86.15)$$

假設鏈的起端短路，末端开路，我們来求关于确定这种情形的鏈的固有頻率方程式。起端短路就是說：$C_1\to\infty$，末端开路則对应于 $C_2\to 0$，因此，根据(85.15)，

$$\alpha_1=1-\omega^2LC, \qquad (86.16)$$

$$\alpha_2\to\infty.$$

將(86.16)代入公式(85.17)，就得到：

$$(1-\omega^2LC)\sin 2\gamma n-\sin 2\gamma(n-1)=0. \qquad (86.17)$$

我們記得，$\alpha^2=p^2LC$，又將(86.17)和(86.15)加以比較，便可推出 $\beta_1=2\gamma$。这就表示，在共振振动的情形中，外电动势頻率等于鏈的輸入端短路时的固有頻率。

我們着重指出：在对应于輸入阻抗为零的頻率时，則仅仅当外电动势被給定时，才会有共振振动(無穷大振幅)。和上面一样，假如給定了第一个網目中的电流振动，那末，鏈中振动的振幅是有限的，从而不会發生振动的共振。关于这一点，可以由公式(86.10)中看出来：当給定的 I_{10} 是有限値时，由于 $\sin\beta_1 n\neq 0$，A_1 也是有限値。

因此，在均匀元件的鏈中，共振不仅仅决定于外电动势的頻率，而且与在系統上的作用方式有关。在給定外电动势的情况下，和給定电流的情况下，会發生完全不同的結果，这一点在 §17 的簡單例子中已經說明了。

在机械系統中，类似于阻抗共振的是动剛度共振。情况恰好也是如此，如果作用于鏈的起端的外力是給定的，那末假定頻率为 p 时，鏈的起端的动剛度变为無穷大，这时便不会有共振振动。如果給定的是机械鏈起端的位移，那就会有共振振动。

在分析一个例如圖 208 所示的机械鏈中的振动时，可以很清楚地看出在兩种情况下动剛度共振时的振动。

当給定了作用于第一个質量上的外力时，受迫振动在頻率与振幅分布上跟第一个質量靜止时的固有振动相同，而且，这些振动的振幅是这样的：就是引起第二个彈簧形变的力剛好与作用力大小相等，方向相反，从而，第一个質量处于靜止狀态。外力作用点的位移等于零，由此可見，外力所作的功也等于零，因此，在鏈中不可能有無限大振幅的振动。

当給定的是第一个質量的位移时，就完全又是另外一种情形。如要使第一个質量有位移，就必須加以具有無限大振幅的力。由于連接第一个与第二个質量的彈簧的形变力应該与無限大的外力平衡，因此，第二个質量的位移也会是無限大。

显然，在那些可使动剛度变为零的頻率时，一切結果都会反过来：給定外力时，有共振振动，給定位移时，沒有共振振动。

可以証明：在一般情形的复杂綫性电路中，当頻率等于整个电路在某一支路断开时的固有頻率时，在这一支路的断开处就發生阻抗共振。如果当阻抗共振时，給定的是电动势，那就不会發生共振振动；假如給定的是电流，那么，在电路中就会有共振振动。

相反，当頻率等于复杂电路在某一支路短路时的固有頻率时，在該支路断开处的复阻抗將等于零。如果給定的是这一頻率的电动势，那末，在系統中会有共振振动；假如給定的是流过該支路的电流，那末，便不会有共振振动。

对于系統在某一点的动剛度来說，也可以作出类似的表述；仅仅应該記住：在固有振动时，电路的断开，相等于作用点的固定，电路的接通，相等于在固有振动时該点沒有任何外部耦合。

直到現在，我們所研究的是在条件(86.4)（即 $\alpha^2<2$）下在低頻濾波器中的受迫振动；这就表示，振动的頻率是

$$p<\sqrt{\frac{2}{LC}}. \qquad (86.18)$$

这样一来，仅在低频率且满足条件(86.18)时，才会發生受迫振动振幅的正弦分布，才会發生剛剛考虑过的共振現象。因此，頻率

$$\sqrt{\frac{2}{LC}}$$

称为低頻濾波器的临界頻率。我們注意：濾波器的傳輸常数(86.14)在頻率小于临界頻率时不会为零，当 $p=\sqrt{2/LC}$ 时，它(86.5)便等于零①。在振动的共振时，它等于無限大。

如果頻率 p 大于临界頻率，

$$\alpha^2>2 \text{ 或是 } p>\sqrt{\frac{2}{LC}},$$

那末，振动振幅的分布將按照指数規律發生，事实上，方程式(86.3)的解与方程式(85.11)的解相似，因此，可以將(86.2)中的 λ 这个量表为：

$$\lambda=\chi+i\pi,$$

这里 χ 是下列方程式的解

$$LCp^2-2=2\operatorname{ch}\chi. \qquad (86.19)$$

和(85.13)相似，振动振幅可以写成：

$$A_l=(-1)^l(D_1e^{\chi l}+D_2e^{-\chi l}),$$

而受迫振动是：

$$q_l=(-1)^l(D_1e^{\chi l}+D_2e^{-\chi l})\cos pt. \qquad (86.20)$$

如果認为最后的網目是断开的，即 $q_{n+1}=0$，那末，受迫振动是

$$q_l=(-1)^lD_1[e^{\chi l}-e^{2\chi(n+1)-\chi l}]\cos pt,$$

或是
$$q_l=(-1)^lD\operatorname{sh}(n+1-l)\chi\cos pt, \qquad (86.21)$$

其中
$$D=-2D_1e^{\chi(n+1)}.$$

① 严格的講，关于这种情形的解需要單独来研究。

借助于圖 217，可以設想出在某一瞬間沿着整个鏈的振动，在圖 217 中，將每一个元件中与电荷 q_l（或电流）成正比的量沿坐标軸用粗綫段列出；因为在相鄰的兩个元件中，振动是反相位的，所以把歧离表出在軸的兩边。振幅沿着鏈按指数規律減少，我們記得，在低頻（$p<\sqrt{2/LC}$）时，振幅的分布，类似于圖 214 所示的固有振动时的振幅分布。

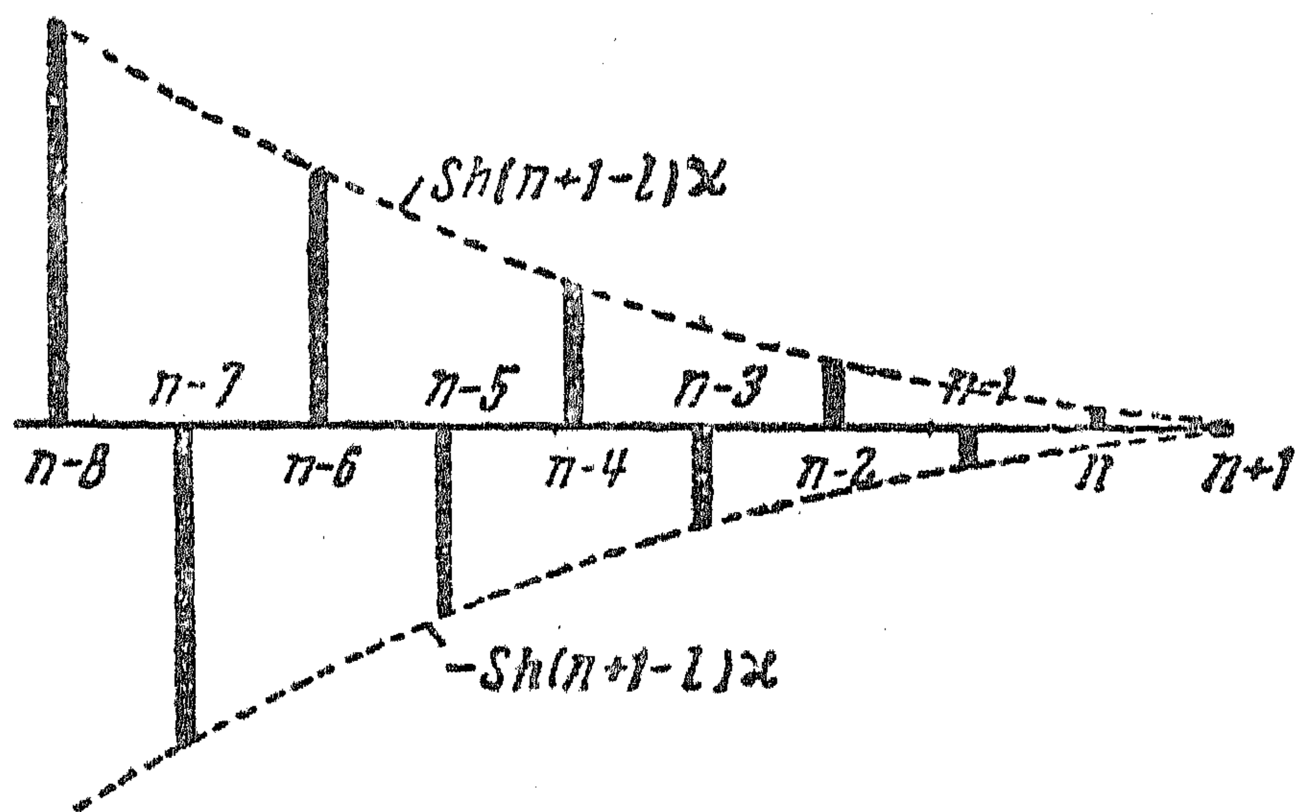


圖 217.

將（86.21）的解代入第一个網目的方程式(86.1)中，就得到振幅的値：

$$D=\frac{\xi_0 C}{(\alpha^2-1)\operatorname{sh}\chi n+\operatorname{sh}\chi(n-1)}. \qquad (86.22)$$

仿照(86.11)，輸入阻抗是：

$$W=\frac{(\alpha^2-1)\operatorname{sh}\chi n+\operatorname{sh}\chi(n-1)}{pC\operatorname{sh}\chi n}, \qquad (86.23)$$

而傳輸常数(86.14)是：

$$\frac{V_k}{\xi_0}=\frac{\operatorname{sh}\chi}{(\alpha^2-1)\operatorname{sh}\chi n-\operatorname{sh}\chi(n-1)}. \qquad (86.24)$$

从(86.19)中看到：χ 随着 p 的增高而增加，因此，輸入阻抗 W 將随頻率而增大，而当 $p\to\infty$ 时，輸入阻抗趋向于 pL，这是可以直接看出来的。傳輸常数也随着頻率 p 的增加而減少，可是，当鏈的元件的数目增加时，傳輸常数減小得更快，这是因为分母几乎是按照指数規律在增大。因此，將鏈的元件选擇得足够多时，便可以使傳輸常数，在頻率 p 高于临界頻率的所有情況下，实际上是一个微不足道的量，鏈把所有高于临界頻率的頻率"濾去了"。

有阻尼存在时，可以用上述的方法来計算鏈中的受迫振动，当

然，这时要利用复数振幅方法。我們可以把均匀元件的鏈表成圖218所示的形式，在这个圖中，$\bar{Z}_1$ 代表鏈的环节的串联元件的复数阻抗，$\bar{Z}_2$ 代表并联元件的复数阻抗；$\bar{I}_l$ 是通过脚标为 l 的網目中的元件 $\bar{Z}_1$ 的电流复数振幅，$\bar{V}_l$ 是在 $\bar{Z}_2$ 上的电压复数振幅。

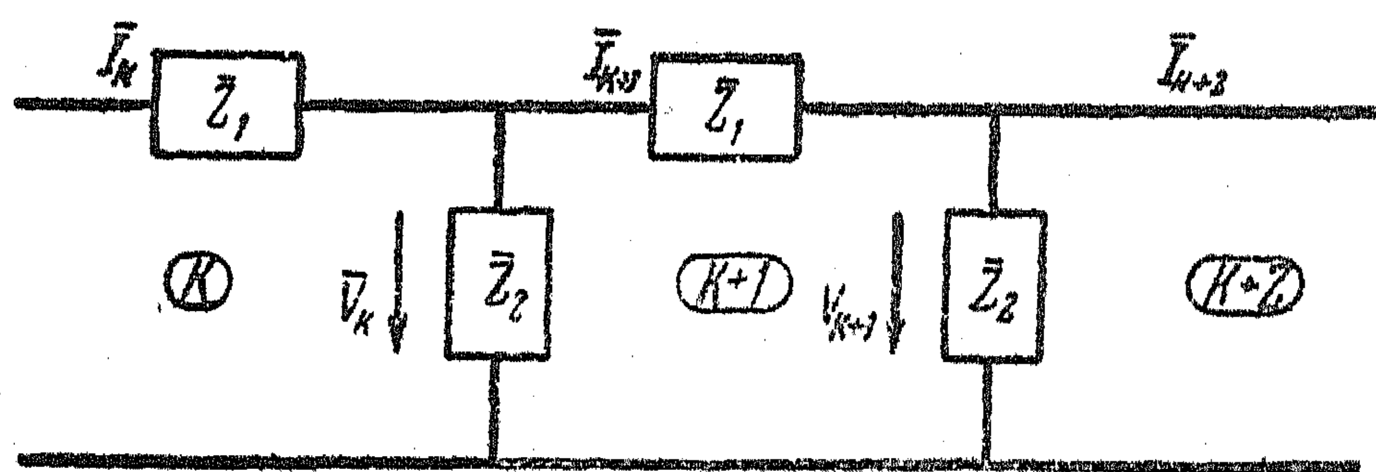


圖 218.

在分支处的电流方程式是：

$$\frac{\bar{V}_l}{\bar{Z}_2}+\bar{I}_{l+1}=\bar{I}_l, \tag{86.25}$$

沿閉迴路的电压方程式是：

$$-\bar{V}_l+\bar{I}_{l+1}\bar{Z}_1+\bar{V}_{l+1}=0. \tag{86.26}$$

从每对方程式(86.25)和(86.26)中消去电流，就得到：

$$\bar{V}_l-\bar{V}_{l+1}\left(2+\frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2}\right)+\bar{V}_{l+2}=0, \tag{86.27}$$

每个方程式表明着三个串联的單元上的电压間的关系。对于兩端的網目而言，必須單独地写出它們的方程式。方程式(86.27)类似于(85.6)，不过系数$[2+(\bar{Z}_1/\bar{Z}_2)]$是一个复数，方程式(86.27)的也可以求出，其形式如下：

$$\bar{V}_l=Ae^{\lambda l}.$$

將上式代入(86.27)中，就得到确定 λ 的方程式：

$$\operatorname{ch}\lambda=1+\frac{\bar{Z}_1}{2\bar{Z}_2}.$$

解这个方程式，同时选取常数，使得满足在第一个網目和最后一个網目中的条件，我們就得到任何頻率 p 的受迫振动。由于量 λ 总是复量，那末，振幅的分布便由三角函数乘以指数函数来表示，此外，相位也随着網目而有不同。

当阻尼不大时，鏈中振动的情形，接近于我們所研究过的無阻尼系統的情形，不过在共振时，振幅不会变成無限大，而仍旧是很大。

第三章　具分布参数的振动系統

§87. 具分布参数的均匀系統

我們可以把彈性均匀杆的縱振动，或者裝有气体的管中的振动，当作是具有無穷多个自由度的系統的振动。在这种場合中，凡位在任何横截面上的質点都沿着杆的軸綫作振动。在分析具有有限个自由度数的系統时，总是認为系統所含有的元件，仅仅具有某一种确定的物理性質。例如，質量和彈簧的鏈是假定由沒有重量的彈簧和絕对剛性的質量所組成的。系統的每一元件或者只有剛度(彈簧)，或者只有慣性(質量)[①]。在均匀杆中，每一个元件，無論多么小，却既有剛度又有質量，剛度和質量的大小与杆的材料性質和該元件的尺寸有关。

在具有有限个自由度的系統中，每一个元件的特征是：或者具有一定大小的剛度，或者具有一定大小的質量。振动系統的物理参数——剛度和質量——是集中在个别元件中的。知道这些参数和各个元件的連接方法，就解出了振动的問題。上面講过，杆的任何一个元件都是既有剛度，又有質量[②]的，因此，我們把这种系統称为具有分布参数的系統。

現在来建立均匀杆的縱振动(或者在管中气体的振动)的方程式。用 x 代表杆的某一横截面上的質点在靜止狀态下的坐标。用 y 代表这一截面的質点在振动时沿杆的軸綫的位移（圖 219)，令杆的横截面积为 S，材料的密度为 ρ，杆長为 l，材料的彈性模量

---

① 严格講来，在实际中总不会是这样的，可是正如前面曾經指出的，在低頻振动时，可以用这种系統来进行研究。

② 可以加上：还有摩擦。

为E。当各截面移动时，在杆中所产生的彈力可以由下列的方法来确定。

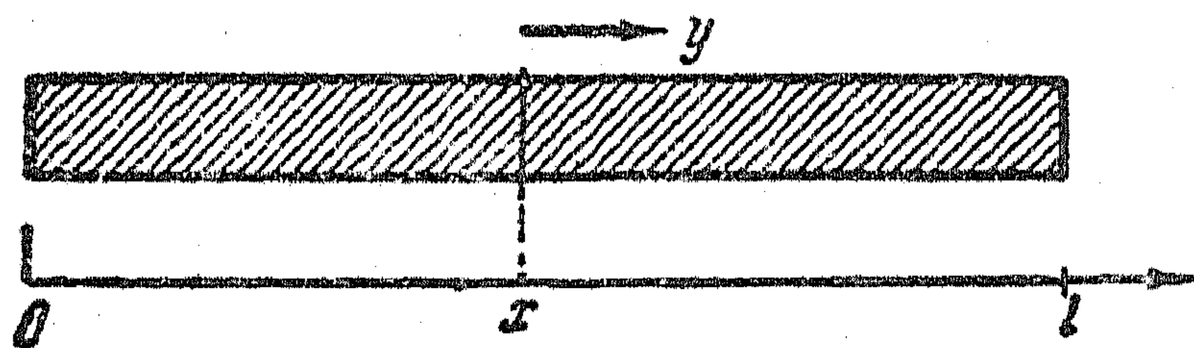


圖 219.

在杆的一个坐标为 x 的截面附近，取一元件，假設它在無形变狀态下的長为 dx，那末，当形变时，这一元件的長是

$$dx+y(x+dx)-y(x)=dx+\frac{\partial y}{\partial x}dx.$$

因此，这一元件長度的变化等于:

$$\frac{\partial y}{\partial x}dx.$$

元件会縮短或者伸長，假如元件 dx 处于靜止狀态下，那末，由杆的其他部分所加在这个元件兩边的力会大小相等、方向相反（圖 220）。当形变足够小时，根据虎克定律，这些力等于

$$ES\frac{\partial y}{\partial x}.$$

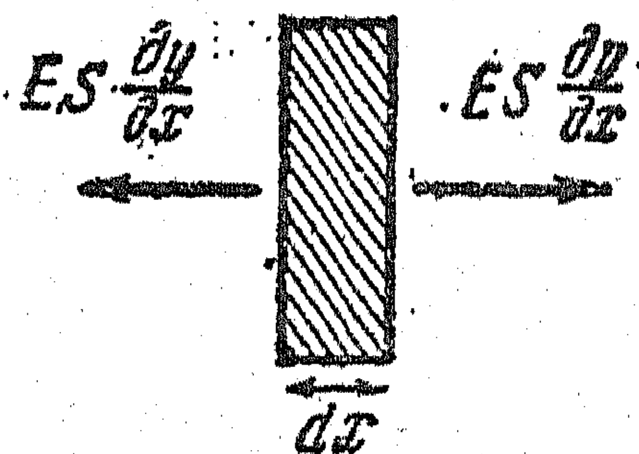


圖 220.

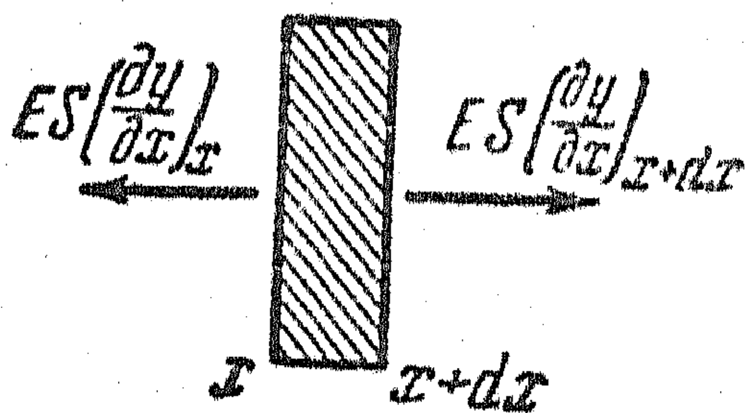


圖 221.

坐标 x 代表杆的某一确定的截面，說得更正确些，代表該截面的質点在靜止狀态下的坐标。它与在均勻鏈中环节的号碼相似。因此，在圖 220 上，dx 代表这样一个元件，它在靜止狀态下的長度为 dx。在振动时，位移 y 是兩个变数（时間 t 和坐标 x）的函数。当振动时，当元件 dx 沿杆的軸綫运动时，由相鄰元件所加于这一元件上的力的和不等于零，这个和应該等于这一元件的質量乘加速度（圖 221）。元件的質量为 ρSdx，加速度为 $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$，因此

$$\rho\, Sdx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=ES\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+dx}-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x\right], \tag{87.1}$$

或者

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{87.2}$$

这是关于 y 的，即关于杆的截面位移的波动方程式。假如 ρ 和 E 都与 x 有关，波动方程式就要复杂得多，不过，可以用建立均匀杆方程式的那种方法，来建立这个方程式。

設有一个系統，由兩根平行导綫組成（圖 222），如果我們来研究这个系統中的电磁振动，就会得到同样的波动方程式。要求出長度为 l 的兩根平行导綫中电磁振动的問題的精确解，应該根据馬克斯威尔方程来进行，从而是一个相当复杂的問題。

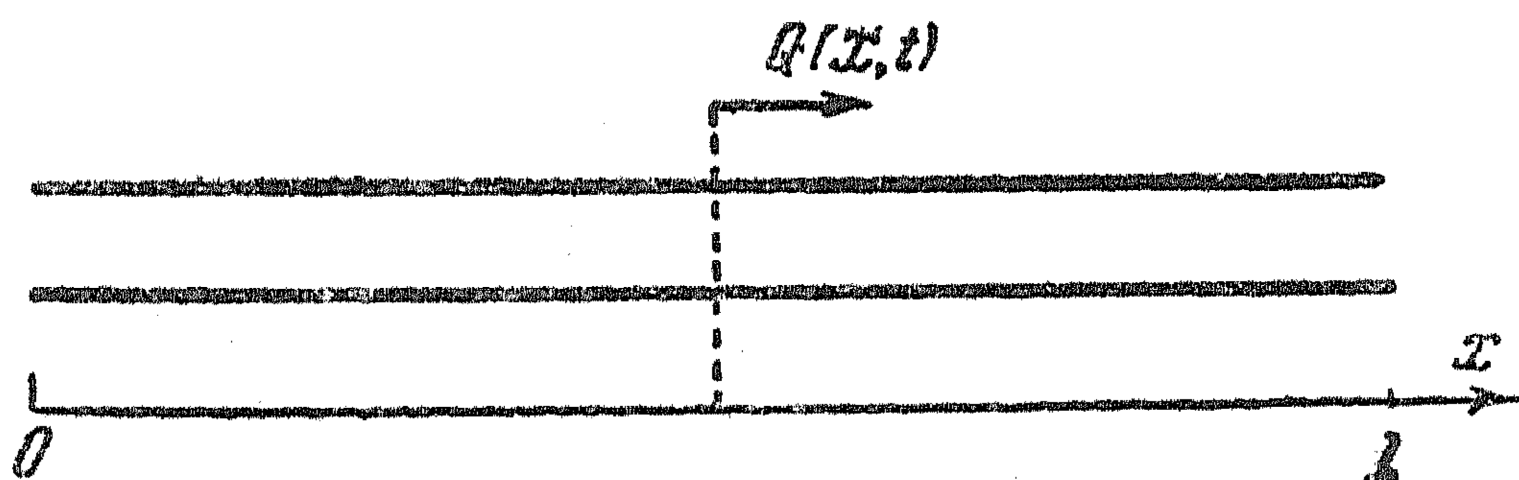


圖 222.

然而，假如导綫間的距离与綫的長度比較起来，显得很小，同时，导綫的电阻同样很小，那末，便可以把在 dx 一段綫（与原点的距离为 x 的一段綫）附近的电磁場，大致上看作是由 dx 一段导綫上的电荷 $Q(x)$ 和电流 $I(x)$ 在該瞬間所产生的。这种場所具有的特性，就好比 dx 这一段是由無限長綫中划分出来的一样，沿这長綫上均匀分布着电荷 $Q_0=Q(x)$ 和电流 $I_0=I(x)$。因此，在导綫周圍的电力綫和磁通是位于与导綫成正交的平面中。电磁場的理論指出，对于由理想导体（其电阻等于零）作成的無限長綫来說，这种論据是正确的；对于我們所討論的問題来說，它仅仅大致上是正确的。

設在瞬間 t，通过兩根导綫上坐标为 x 的截面的电量各为 $Q_1(x,t)$ 和 $Q_2(x,t)$（圖223）。于是，假如电力綫仅仅停留在这些导綫上①，

① 換句話說，其他的导体不参与振动。

那末，

$$Q_1(x, t)+Q_2(x, t)=0. \qquad (87.3)$$

由这里推出，在兩根导綫中每一个截面的电流是大小相等，而且方向相反的，其实由(87.3)得，

$$\frac{\partial Q_1}{\partial t}=-\frac{\partial Q_2}{\partial t},$$

假如用 $I(x, t)=\frac{\partial Q}{\partial t}$ 代表电流，那末

$$I_1(x, t)=-I_2(x, t).$$

以后可以撇开脚标，并且簡單地假定：如果在第一个导綫中的电流为 $I(x, t)$，那末，在第二个导綫中的电流便与它相等而方向相反。对于电量 $Q(x, t)$ 来説，也是一样。

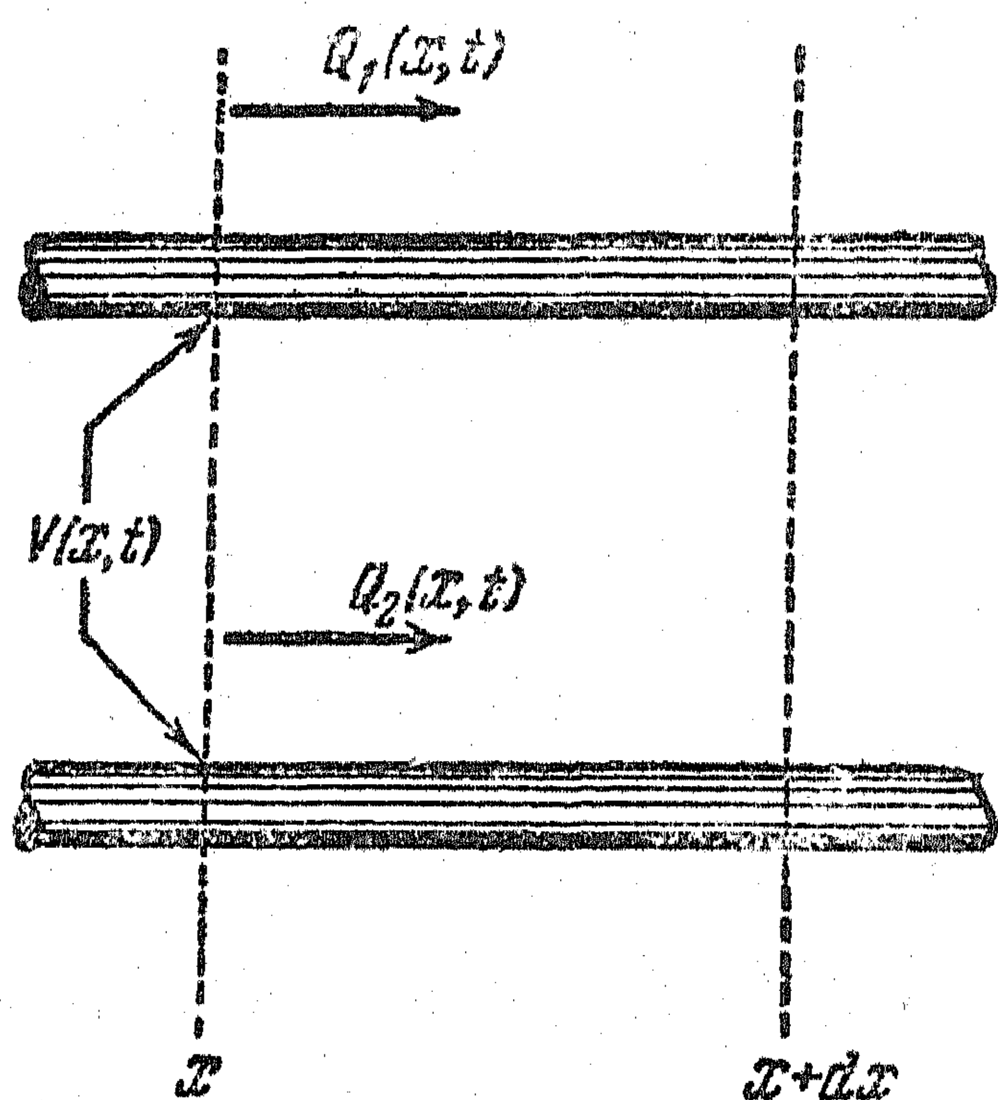


圖 223.

dx 一段导綫間的电位差 $V(x, t)$ 表明着电容量和导綫上的电荷間的关系，假如用 C_0 来代表單位長度的兩导綫間的电容，那末，兩导綫在 dx 一段間的电容是 C_0dx，在 dx 一段导綫上的电量是

$$Q(x)-Q(x+dx)=-\frac{\partial Q}{\partial x}dx;$$

这电量与电位差 $V(x, t)$ 的关系是：

$$-\frac{\partial Q}{\partial x}dx=C_0dxV,$$

或者

$$-\frac{\partial Q}{\partial x}=C_0V. \qquad (87.4)$$

沿导綫的电压降决定于导綫的电阻与电感。令导綫單位長度的电阻为 R_0，那末，兩段 dx 的导綫以及連接这兩端导綫的綫便組成一

个迴路(圖 224)，圍繞这个迴路的电位差的方程式是：

$$V(x+dx,\,t)+R_0dxI(x,\,t)-V(x,\,t)=-\frac{\partial\phi}{\partial t},\tag{87.5}$$

其中 ϕ 是通过迴路的磁通，假如用 L_0 代表單位長度导体的电感，那末，磁通 ϕ 便由电流 $I(x,\,t)$ 来确定，或

$$\phi(x,\,t)=L_0dxI(x,\,t),\tag{87.6}$$

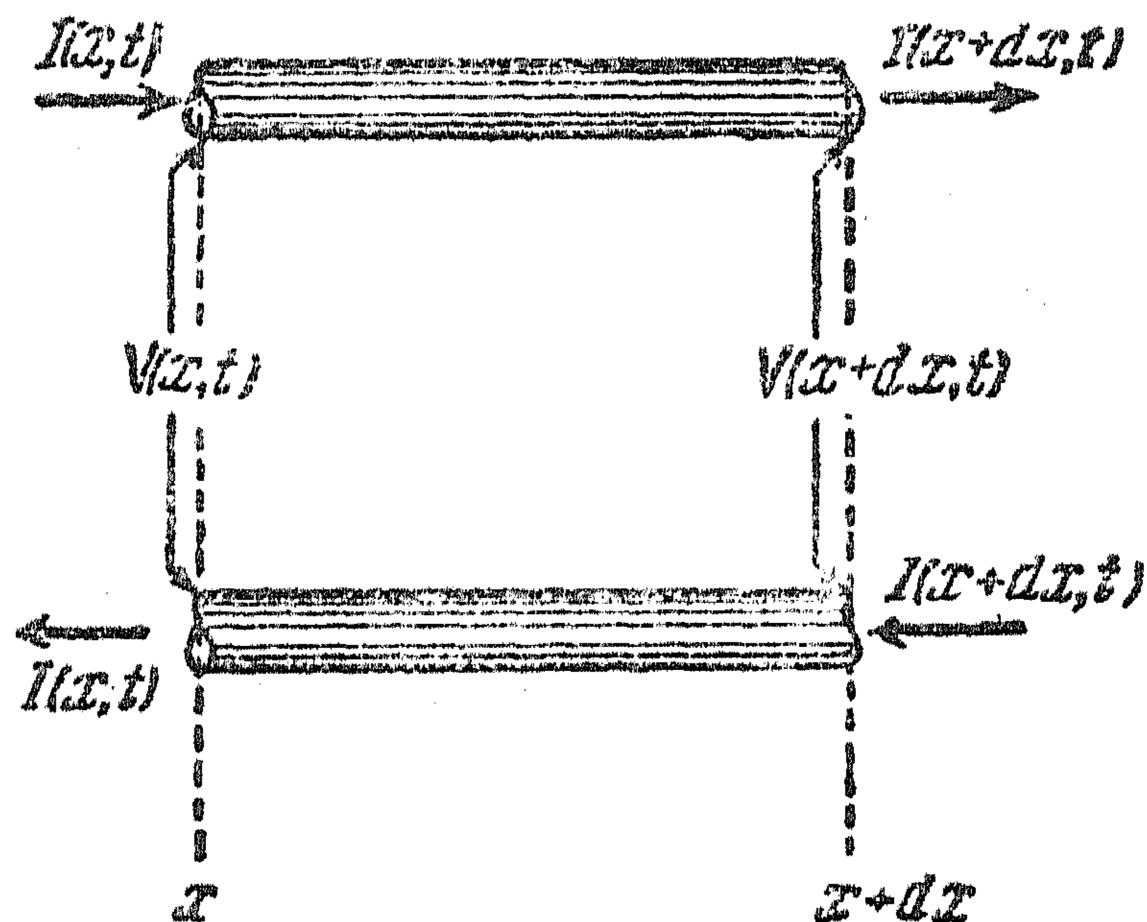


圖 224.

將(87.6)代入(87.5)并作变换，便得到第二个方程式：

$$\frac{\partial V}{\partial x}=-R_0I-L_0\frac{\partial I}{\partial t}.\tag{87.7}$$

由(87.4)和(87.7)这兩个方程式，可以得出一个关于电荷 $Q(x,\,t)$ 的方程式，它具有下列形式：

$$L_0C_0\frac{\partial^2Q}{\partial t^2}+R_0C_0\frac{\partial Q}{\partial t}=\frac{\partial^2Q}{\partial x^2},\tag{87.8}$$

或者得出一个关于电压的方程式：

$$L_0C_0\frac{\partial^2V}{\partial t^2}+R_0C_0\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial^2V}{\partial x^2},\tag{87.9}$$

因为 $I=\frac{\partial Q}{\partial t}$，所以对于电流而言，也可以写出同样形式的方程式，像(87.8)或者(87.9)那样形式的方程式称为电报方程式。

假如將导綫的欧姆律电阻略去，即認为 $R_0=0$，那末，就得出波动方程式，例如，关于 V 的波动方程式：

$$\frac{\partial^2V}{\partial t^2}=\frac{1}{L_0C_0}\frac{\partial^2V}{\partial x^2}.\tag{87.10}$$

假如把分布参数的系統，当作是具有集总元件的系統的一种極端情形，在这种情形，元件的数值無限地減小，而元件的个数相

应地無限增加，那么，也可以导出波动方程式。取一个低頻濾波器(圖 215)，將它的每一个網目分成同样的两个，并使所有網目的电感和电容都保持不变。这样一次又一次地繼續分下去，在極端情形下，就得到具有分布电感和分布电容的系統，鏈的方程組(85.1)，在極端的情形下，变成了(87.10)形式的波动方程式，在这种方程中，坐标 x 起着網目脚标的作用。

因此，在沒有摩擦(沒有电阻)的均匀分布的系統中，任何元件的振动都决定于波动方程式，例如(87.2)或者(87.10)。这意味着，在这种系統中可以傳播無畸变的波，或者說(87.2)有这种解:

$$y(x, t)=f_1(x-ct)+f_2(x+ct), \qquad (87.11)$$

在上式中，f_1 和 f_2 是其宗量的任意函数，而

$$c=\sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad (87.12)$$

是波的傳播速度。波沿 (87.11) 中 x 增大方向的傳播情况，在圖 225中表明得很清楚；假如在某一瞬間 $t=0$，$y=f(x)$ (圖 225, a)，那末，經过时間 t_1，位移 y 会具有如圖 225, $б$ 所示的形式，也就是說，“位移 y 的波”無畸变地作了大小为 ct_1 的“移动”。

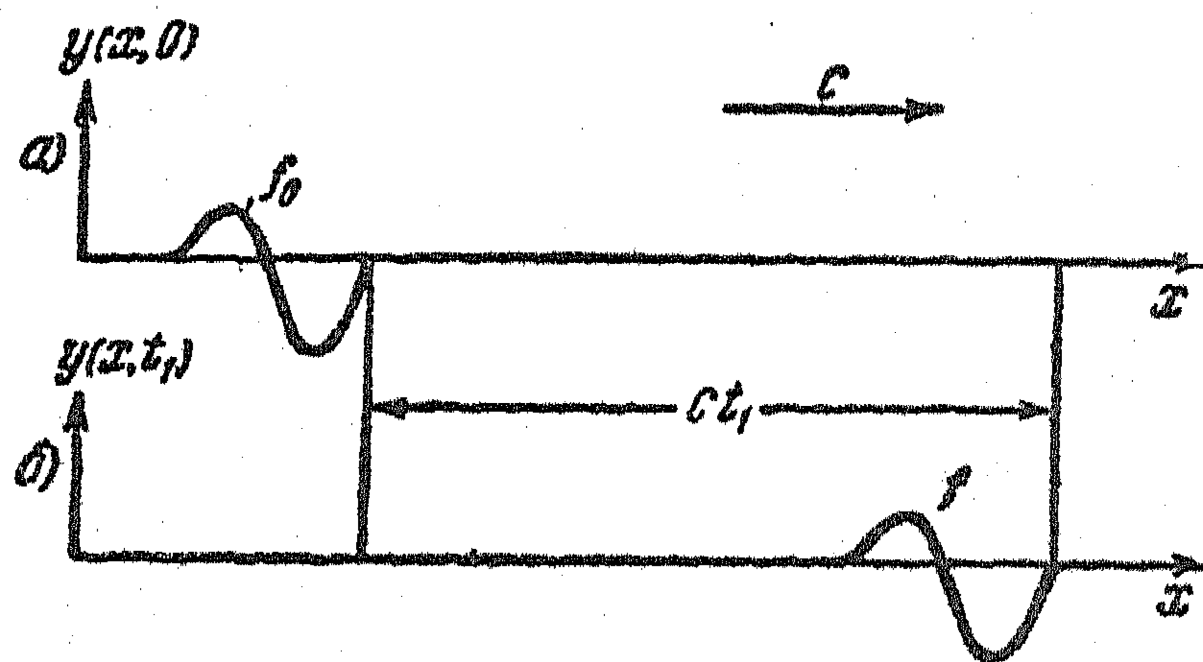


圖 225.

波的傳播速度(87.12)仅仅与杆的材料有关，即与剛度的分布参数(E)和質量的分布参数(ρ)有关。增加彈性模量 E，会使傳播速度增加；相反，增加杆的密度 ρ，会減小波的傳播速度。对于沿导綫傳播的电波而言，根据方程式(87.10)，傳播速度等于

$$c=\frac{1}{\sqrt{L_0C_0}}. \qquad (87.13)$$

由电学中知道，兩平行导綫單位長度的电容等于

$$C_0=\frac{\varepsilon}{4\ln\frac{d}{b}}\ (\text{在}\ d\gg b\ \text{的情况下}),\qquad(87.14)$$

其中 d 是导綫間的距离，b 是导綫的半徑，ε 是导綫周圍媒質的介电常数，而导綫單位長度的电感等于

$$L_0=\frac{4\mu}{c_0^2}\ln\frac{d}{b}\ (\text{在}\ d\gg b\ \text{的情况下})。\qquad(87.15)$$

上式中的 μ 是导綫周圍媒質的导磁率，c_0 是眞空中的光速。將(87.14)和(87.15)代入(87.13)中，便得到：

$$c=\frac{c_0}{\sqrt{\mu\varepsilon}},\qquad(87.16)$$

也就是，波的傳播速度仅仅与媒質有关。將(87.15)和(87.14)相乘，并考虑到(87.16)时，便得到：

$$L_0=\frac{1}{c^2C_0}\ \text{或者}\ C_0=\frac{1}{c^2L_0}.$$

分布电感和分布电容之間的关系仅仅由媒質决定，而与导綫的位置以及直徑的大小無关。

§88. 無阻尼的均匀分布系統的固有振动

在一定長的彈性杆中的固有縱振动，不仅与波动方程(87.2)有关，而且也与杆兩端的情况有关。沿杆进行的波，將由杆的末端反射回去，而波的反射規律則由杆兩端的物理情况来决定。

例如，当杆的兩端被固定时，这就表示：

$$y(0,t)=0\ \text{以及}\ y(l,t)=0,\qquad(88.1)$$

上式中，l 是杆的長度，杆的起端对应于坐标 $x=0$。很明显，假如只有一个向杆的末端傳播的波，条件(88.1)便不能在每一瞬間都得到滿足。因此，应該还有一个由杆的末端返回的反射波，含有

一去一回兩个波的和的那种波，便能滿足兩端的条件(88.1)。向杆的末端傳播的波，在固定处引起了力，由于这种力作用的結果，会产生反射波。

当杆的兩端都是自由端时，就有

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0}=0, \quad \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=l}=0. \qquad (88.2)$$

設有一个彈簧，“支持”于一个未被固定的質量 m，假如这个彈簧的彈力作用于一个坐标为 l 的杆的末端(圖 226)，那末，这一端的条件，便可以用下列方式来建立。用 z 来代表質量 m 由平衡位置的位移，那末，作用于杆上的彈力是

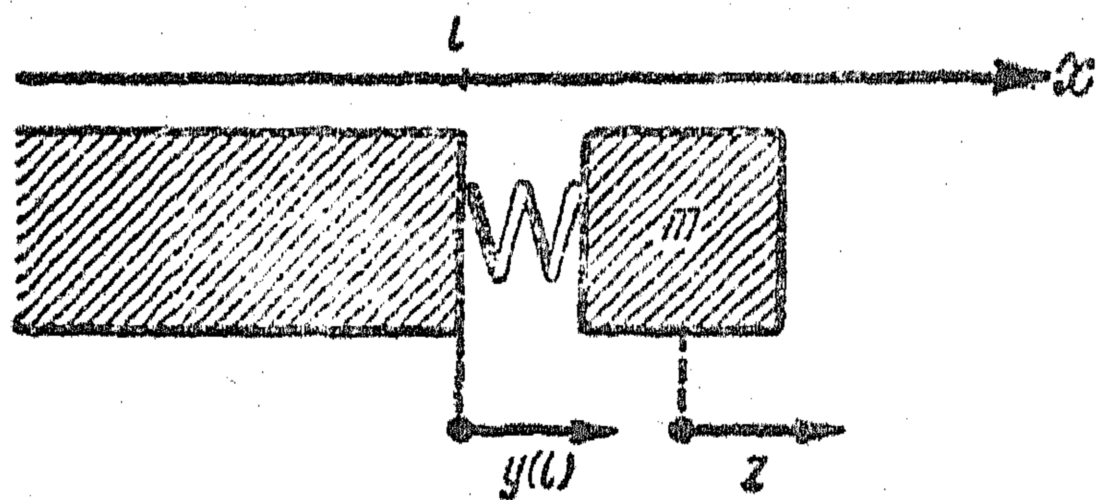


圖 226.

$$k[z-y(l)]=-m\frac{d^2z}{dt^2}, \qquad (88.3)$$

上式中，k 是彈簧的剛度系数。彈力应該等于末端元件上的形变力：

$$ES\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=l} \qquad (88.4)$$

令(88.3)的兩边分别与(88.4)相等，便得到兩个方程式，由这兩个方程式可以消去 z 和 $\ddot{z}$，于是，坐标为 l 的杆的末端的条件是：

$$ES\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=l}+\frac{m}{k}\left(\frac{\partial \ddot{y}}{\partial x}\right)_{x=l}\right]+m\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_{x=l}=0. \quad (88.5)$$

用完全同样的方式，可以將 $x=0$ 的另一端的条件写出，不过偏导函数 $\frac{\partial y}{\partial x}$ 会具有相反的符号。条件(88.5)代表一般情形，而这一条件，在 $m\to 0$ 的極端情形下，就是条件(88.2)；在 $m\to\infty$ 和 $k\to\infty$ 的極端情形下，就是条件(88.1)。由簡單的物理推理，这也是很显明的：假如 $m\to 0$，那末，我們假定彈簧沒有重量，它便不会

引起任何作用力；假如 $m\to\infty$ 和 $k\to\infty$，那末，在有限的时間內，任何力也不能使杆的这一端产生位移。我們也可以用同样的方法，来考虑在振动的杆的一端的摩擦力。

一定長的均匀杆的扭轉振动的規律，和縱振动的規律相同。

对于由一定長的兩根平行导綫組成的均匀电气系統而言，要写出它兩端的条件是很簡單的。这种条件也是各式各样的，要看在导綫末端連接了什么而定。

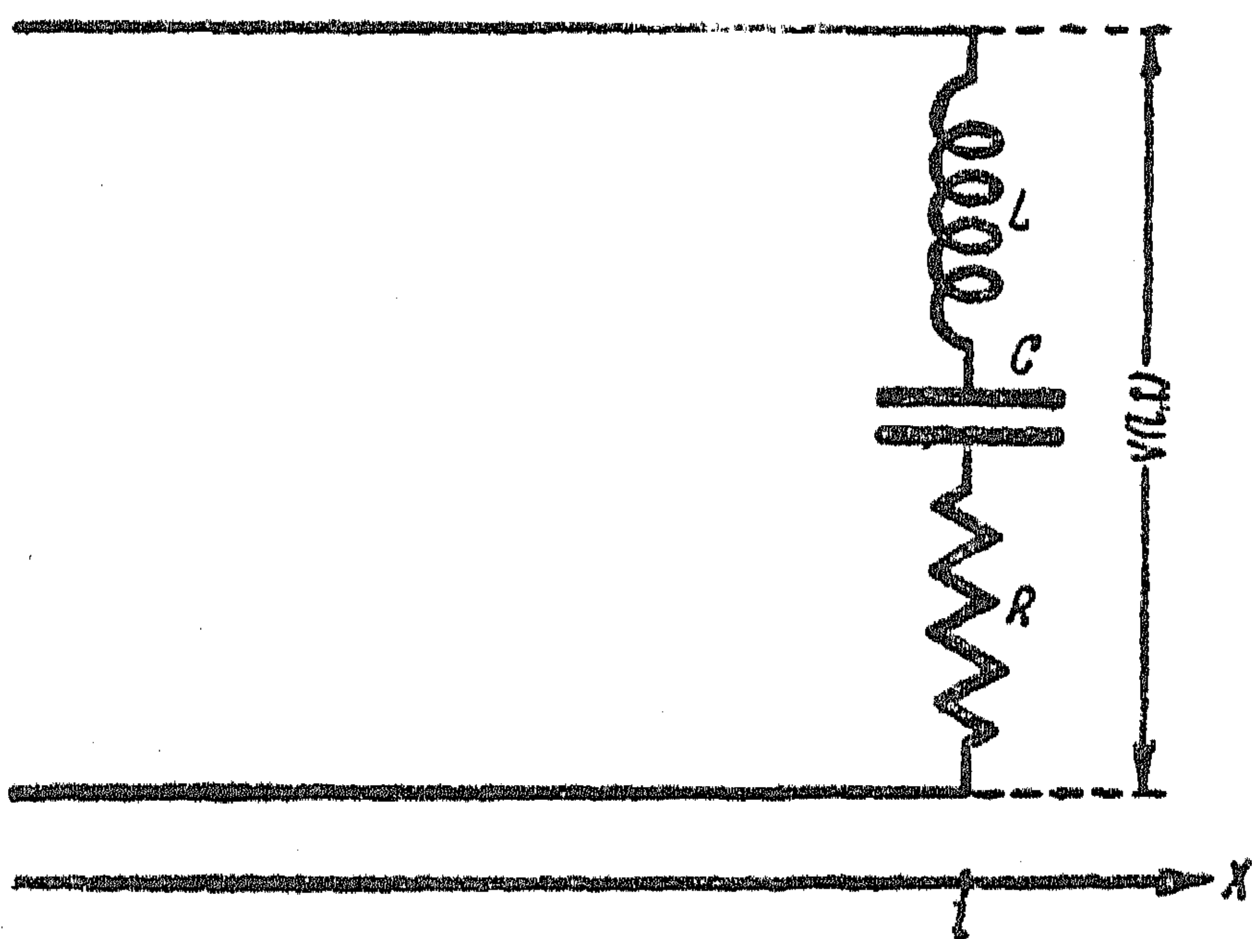


圖 227.

在一般情形下，令在 $x=l$ 的一端接有如圖 227 所示的电路，这电路是由电感 L 电容 C 以及电阻 R 串联而成。那末，在这一端的条件应該写为：

$$V(l,t)=L\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}\right)_{x=l}+R\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_{x=l}+\frac{1}{C}Q(l,t),\quad (88.6)$$

假如記得(87.4)时，那末，条件(88.6)便可以仅仅由导綫一端的电荷振动来表出。

$$L\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}\right)_{x=l}+R\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_{x=l}+\frac{1}{C}Q(l)+\frac{1}{C_0}\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_{x=l}=0.\ (88.7)$$

也可以写出关于电流的这种条件，以及关于电压的这种条件。当这一电路接在 $x=0$ 的一端时，这一端的条件和(88.7)相似，不过 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 具有相反的符号。

用取極限的方法，不难由(88.7)得到各种特殊情形下的导綫兩端的条件。例如，假如导綫的兩端是短路的（这就表示，$L\to 0$，$R\to 0$，$C\to\infty$），那末，

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_{x=0}=0, \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_{x=l}=0, \tag{88.8}$$

或者根据(87.4)

$$V(0, t)=0, \quad V(l, t)=0,$$

不待說，由初等理論便可以看出这些关系来。假如綫的兩端是断开的(这就是表示 $C\to 0$)，那末:

$$Q(0, t)=0, \quad Q(l, t)=0,$$

或者

$$I(0, t)=0, \quad I(l, t)=0, \tag{88.9}$$

这也可以直接看出来。

設想波由导綫的一端向另一端傳播，并作与兩端的边界条件相应的反射，当知道了电压 V 沿导綫振动的波动方程式(87.10)以及兩端的条件时，便可以对导綫中的固有振动进行研究。然而这种分析固有振动的方法，并不总是很方便的，用駐波法来分析振动要方便得多，下面就要講到这个方法。

記得§85中的关于在同种單元的鏈中的固有振动时，便可以假定关于电荷 Q 的波动方程式具有駐波形式的特解:

$$Q(x, t)=X(x)\cdot T(t), \tag{88.10}$$

其中 X 只是坐标的函数，而 T 只是时間 t 的函数，显然，在一切点，电荷 Q 作同相位(或者反相位)的振动，如果 T 是諧函数，$X(x)$ 便提供了电荷振动的振幅沿导綫的分布情况。

將(88.10)代入关于电荷的波动方程式①

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2},$$

便得到:

$$\frac{d^2T}{dt^2}X=c^2T\frac{d^2X}{dx^2} \quad 或 \quad \frac{\frac{d^2T}{dt^2}}{T}=c^2\frac{\frac{d^2X}{dx^2}}{X}. \tag{88.11}$$

① 假定在(87.8)中的 $R_0'=0$，并注意到表示符号(87.13)时，这一方程式可由(87.8)推出。

因为(88.11)的右边只有 x 的函数，而左边只有 t 的函数，所以仅仅在这种情形下，即当两边都等于同一个常数，例如都等于 $-\omega^2$ 时，(88.11)才能成立。因此，方程式(88.11)与下列两个方程式等效：

$$\frac{d^2T}{dt^2}+\omega^2T=0,\ \frac{d^2X}{dx^2}+\frac{\omega^2}{c^2}X=0, \tag{88.12}$$

显然，这些方程式的通解可以写为：

$$\begin{aligned}T&=A\cos\omega t+B\sin\omega t,\\ X&=C\cos\frac{\omega}{c}x+D\sin\frac{\omega}{c}x,\end{aligned} \tag{88.13}$$

其中 A, B, C 和 D 都是常数，这些常数和 ω 应該首先选擇得使(88.13)能滿足导綫兩端的条件。

当兩端的条件不同时，所求得的关于这一問題的解会相差很远。現在来研究这一問題的任意一种情形，例如，当导綫 $x=0$ 的一端断开，$x=l$ 的一端接通的情形。在其他的情形下，可以用类似的方法求解。于是，根据(88.8)和(88.9)，在任何瞬間 t，函数 $X(x)$ 都应該滿足下列条件：

$$X(0)=0,\ \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{x=l}=0,$$

代入(88.13)时，便得到：

$$C=0,\ \frac{D\omega}{c}\cos\frac{\omega l}{c}=0; \tag{88.14}$$

D 可以是任意値，ω 則应該这样选擇，务使它能滿足(88.14)的第二个等式。三角方程式

$$\cos\frac{\omega l}{c}=0$$

具有無穷多組解，即：

$$\omega_s=\frac{\pi c}{2l}(2s+1),\ 其中\ s=0, 1, 2, \cdots \tag{88.15}$$

由解(88.13)可以看出，ω 具有振动频率的物理意义。因此，ω_s 是

系統振动的固有頻率。果然如我們所預期的，由于系統有無窮多个自由度，便有無窮多个固有頻率。

因此，在这种情形下，特解(88.10)可以写成：

$$Q_s(x, t)=D_s \sin \frac{\omega_s}{c} x \sin (\omega_s t+\varphi_s), \qquad (88.16)$$

这里不用常数 A, B 和 D，而引用了 D_s 和 φ_s 这兩个常数。对于每一个固有頻率 ω_s 而言，都可以写出(88.16)的解，因此，通解等于：

$$Q(x, t)=\sum_{s=0}^{\infty} Q_s(x, t)=\sum_{s=0}^{\infty} D_s \sin \frac{\omega_s x}{c} \sin (\omega_s t+\varphi_s), \qquad (88.17)$$

上式中的 D_s 和 φ_s 是由起始条件所决定的常数，这一点，將在下面指出。

(88.16) 的每一个固有振动代表一个正弦駐波：每一点的电荷随时間作諧振动，并与其他点的振动同相位(或者反相位)，一切点的振动振幅一般是不相同的。振动振幅沿导綫的分布由函数 $\sin \frac{\omega_s x}{c}$ 来代表，并称为固有振动的波形。关于头几个頻率的电荷振动振幅沿导綫的分布，如圖 228 所示。电荷的每一个頻率的固有振动波形是一个正弦波，它在导綫的一端($x=0$)为零，而在导綫的另一端($x=l$)为最大値。如果假定已知振动的波形应該是正弦波，那末上面所講的这些，都可以由簡單的物理推理来确定。振动振幅恒等于零的点称为节，而振动振幅为最大値的点称为腹。在这种情形下，我們是对电荷 Q

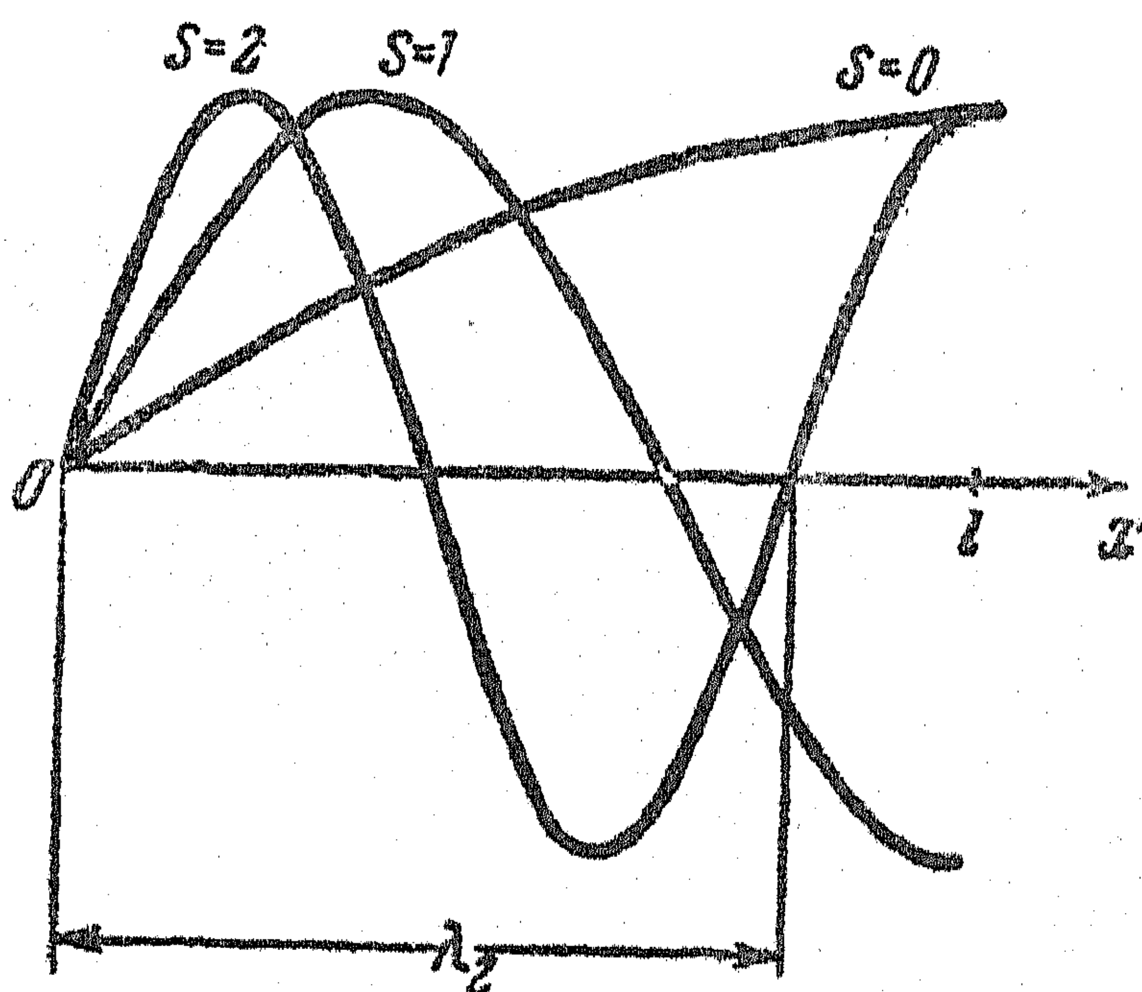


圖 228.

的固有振动波形进行研究，可是由于电流 $I=\frac{\partial Q}{\partial t}$，那末，对于电流振动而言，也会有同样的波形。因此，不难断言：在均匀导綫中的每一个固有振动会具有这样的电流振动波形，即在断开的一端为节，而在接通的一端为腹。当知道这些时，便可以簡單地算出固有頻率 ω_s。由一般的严正的理論仅仅知道：在均匀系統的情形下，固有頻率有無穷多个，而且，每一頻率的振动波形都是正弦波。

兩个节(或者腹)之間的距离称为半个波長，我們用 λ_s 代表波長，因此，根据(88.16)，得

$$\lambda_s=\frac{2\pi c}{\omega_s}. \qquad (88.18)$$

假如用 $\tau_s=\frac{2\pi}{\omega_s}$ 代表固有振动的周期，那末，

$$\lambda_s=c\tau_s, \qquad (88.19)$$

也就是，波長等于导綫中的波在时間 τ_s 內，即在固有振动的一个周期內所經过的路程，因此 λ_s 称为系統的固有波長。在我們所考虑的情形中，根据圖 228，导綫的長度 l 总等于奇数个四分之一的波長，或者根据(88.15)和(88.19)

$$l=\frac{\lambda_s}{4}(2s+1),\ \text{其中}\ s=0,1,2,3\cdots$$

用这一等式可以簡單地求出固有波長的值：

$$\lambda_s=\frac{4l}{2s+1},\ \text{其中}\ s=0,1,2,3\cdots \qquad (88.20)$$

設有均匀分布系統，它具有(88.8)和(88.9)类型的边界条件，这兩个条件对应于杆的兩端都是自由的，或者都被固定着[①]，当我們分析这种系統的固有振动时，借助于节和腹的相对位置，可以立刻写出和(88.20)类似的确定固有波長的公式。此后，如果知道波的傳播速度 c，便可以根据(88.19)求出固有頻率。

① 相等于兩根平行导綫的兩端都断开或者都接通。

例如，对于兩端固定的杆(或者兩端断开的导綫)而言，在兩端，是位移(电荷及电流)振动的节；对于兩端自由的杆(或者接通的导綫)而言，在兩端，是位移(或者电荷及电流)振动的腹。因此，杆(或导綫)的長度 l 等于半个固有波長 λ_s 的整数倍：

$$l=\frac{\lambda_s s}{2};$$

由上面得

$$\lambda_s=\frac{2l}{s}, \tag{88.21}$$

其中 $s=1, 2, 3, 4\cdots$ 因此，根据(88.19)，固有頻率等于：

$$\omega_s=\frac{2\pi}{\tau_s}=\frac{2\pi c}{\lambda_s}=\frac{\pi cs}{l}. \tag{88.22}$$

將波的傳播速度的値代入上式，便得到当杆的兩端固定(或者自由)时，关于它的縱振动的固有頻率：

$$\omega_s=\frac{\pi s}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}},\ s=1, 2, 3, \cdots, \tag{88.23}$$

其中 E 是彈性模量，而 ρ 是密度。設有長度为 l 的兩根平行导綫，它的兩端短路或者断开，对于这种系統中的电振动而言：

$$\omega_s=\frac{\pi sc}{l}=-\frac{\pi s}{l}\cdot\frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon\mu}},\ s=1, 2, 3\cdots, \tag{88.24}$$

上式中，ε 和 μ 分別代表导綫周圍媒質的介电常数和磁常数，$c_0\approx$ $\approx 3\times10^{10}$ 厘米/秒是眞空中的光速。

現在来研究在一定的起始条件下，兩端断开的电綫中的固有振动。不难証明，在这种情形下，电荷的固有振动可以写成跟公式(88.17)相似的形式：

$$Q(x, t)=\sum_{s=1}^{\infty} D_s\cos\frac{\omega_s}{c}x\sin(\omega_s t+\varphi_s), \tag{88.25}$$

其中 ω_s 由(88.24)来决定，而 D_s 和 φ_s 为常数，在起始瞬間 $t=0$ 时，令在导綫中电荷的分布为 $Q_0(x)$，电流的分布为 $I_0(x)$，或者

$$Q(x,0)=Q_0(x),\quad \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_{t=0}=I_0(x).$$

那末，將(88.25)代入上式，得：

$$Q_0(x)=\sum_{s=1}^{\infty}D_s\cos\frac{\omega_s x}{c}\sin\varphi_s,$$

$$I_0(x)=\sum_{s=1}^{\infty}D_s\omega_s\cos\frac{\omega_s x}{c}\cos\varphi_s;$$

將(88.24)的 ω_s 的値代入上式，得

$$Q_0(x)=\sum_{s=1}^{\infty}D_s\sin\varphi_s\cos\frac{\pi s x}{l},$$

$$I_0(x)=\sum_{s=1}^{\infty}D_s\cos\varphi_s\frac{\pi s c}{l}\cos\frac{\pi s x}{l}.$$

我們求得了給定函数 Q_0 和 I_0 的三角級数展开式。于是，常数 D_s 和 φ_s 可以由下列的方程式求出，这兩个方程式，在三角級数的理論上是已知的：

$$D_s\sin\varphi_s=\frac{1}{l}\int_0^l Q_0(x)\cos\frac{\pi s x}{l}dx,$$
$$D_s\cos\varphi_s=\frac{1}{\pi s c}\int_0^l I_0(x)\cos\frac{\pi s x}{l}dx, \tag{88.26}$$

其中 $s=1,2,3\cdots$。因此，假如給定了电流的起始分布 $I_0(x)$ 和电荷的起始分布 $Q_0(x)$，那末，就單値地决定了电荷固有振动的振幅 D_s(在腹的振幅)和每个振动的起始相位 φ_s。知道所有这些量时，便不难求出其他各量(电流以及导綫間电位差)的振动。

应該記住，$Q(x,t)$是指在瞬間 t 通过截面 x 的电荷，因此，导

綫間的电位差 V 与 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 成正比［公式(87.4)］。在物理学上，通常給定电位差 $V_0(x)$，那末，根据(87.4)

$$V_0(x)=-\frac{1}{C_0}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_{t=0}$$

或者

$$Q_0(x)=-C_0\int_0^x V_0(\xi)d\xi.$$

当無阻尼系統的一端在非齐次条件下，例如公式(88.7)在 $R_0=0$ 时所表出的那种形式时，其固有振动的計算和分析也是这样进行，只不过是計算要比較繁一些。

§89. 在非齐次边界条件下的固有振动的例子

当导綫的一端接有某种元件时，为了指出决定其固有振动和固有頻率的方法，現在来研究一端接有电容器 C 而另一端短路的导綫中的固有振动(圖 229)。

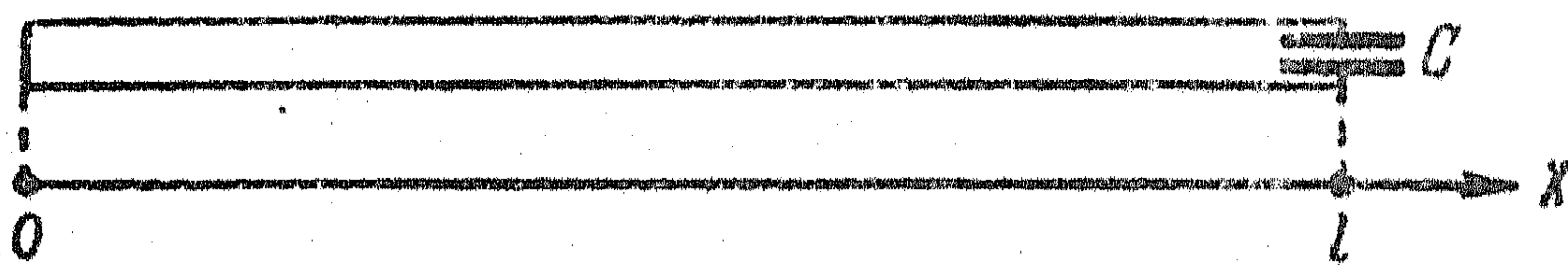


圖 229.

在这种情形下，根据(88.7)，边界条件可以写为下列形式。

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_{x=0}=0,\ \ Q(l,t)+\frac{C}{C_0}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_{x=l}=0. \tag{89.1}$$

把(88.10)和(88.13)的解代到这里，便得:

$$D=0,C\left[\ \cos\frac{\omega l}{c}-\frac{\omega C}{cC_0}\sin\frac{\omega l}{c}\right]=0. \tag{89.2}$$

(89.2)的第二个等式就提供了决定固有頻率的方程式，此式应該改写为:

$$\operatorname{ctg}\frac{\omega l}{c}=\frac{C}{C^*}\ \frac{\omega l}{c}, \tag{89.3}$$

上式中的 $C^*=lC_0$ 是整个导綫的电容，通常用圖解法来解方程式(89.3)。在圖 230 上 $\xi=\frac{\omega l}{c}$，因此，方程式(89.3)的根將对应于 $\xi_1, \xi_2, \xi_3\cdots$ 等值，这些值是直綫 $(C/C^*)\ \xi$ 和余切曲綫的交点的横坐标。当求出 $\xi_1, \xi_2\cdots$ 时，便得到固有頻率:

$$\omega_1=\frac{\xi_1 c}{l},\ \ \omega_2=\frac{\xi_2 c}{l},\ \ \cdots \tag{89.4}$$

由作圖(圖 230) 可以看出，当 $C \ll C^*$，即在导綫一端的电容比整个导綫的电容小得多时，那末，固有頻率將接近于导綫一端断开另一端短路时的頻率。也就是說，固有頻率的値接近于由公式(88.18)以及(88.20)所求得的値。由初等物理的推理，这是很显然的，假如在导綫一端的电容与整个导綫的电容比起来，显得很小，那末，这种情形接近于在导綫这一端是开路的情形。

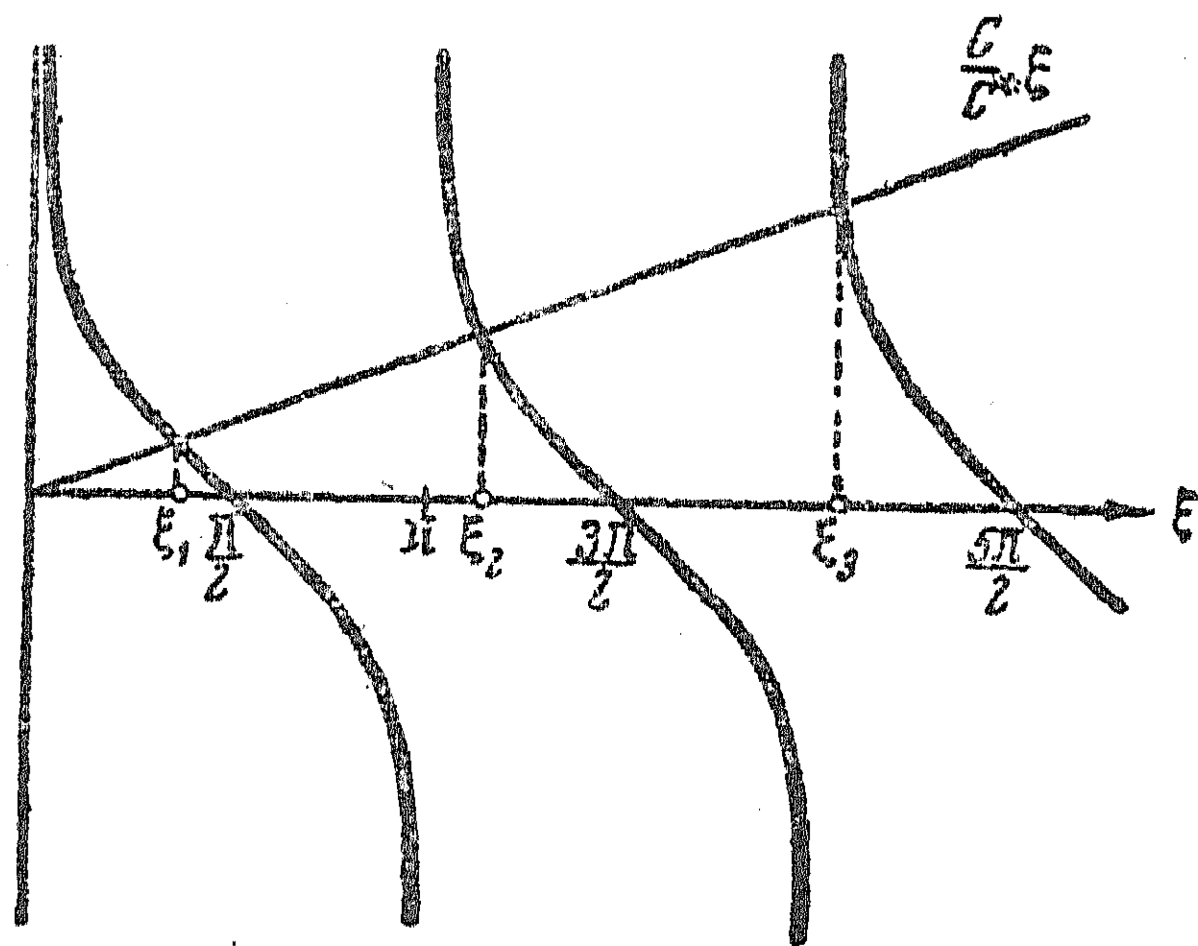


圖 230.

和前面完全一样，由圖230的作圖以及簡單的推理，可以看出，当 $C \gg C^*$ 时，固有頻率將接近于导綫兩端短路时的固有頻率(88.22)。

求出了固有頻率 $\omega_1, \omega_2 \cdots$ 的値以后，將它代入(88.13)，并考虑到(89.2)时，便求出了关于每个固有振动的振动波形。在圖 231 上大略地繪出了头几个(低頻)固有振动的波形，高頻率的波形接近于电容器短路时的波形。

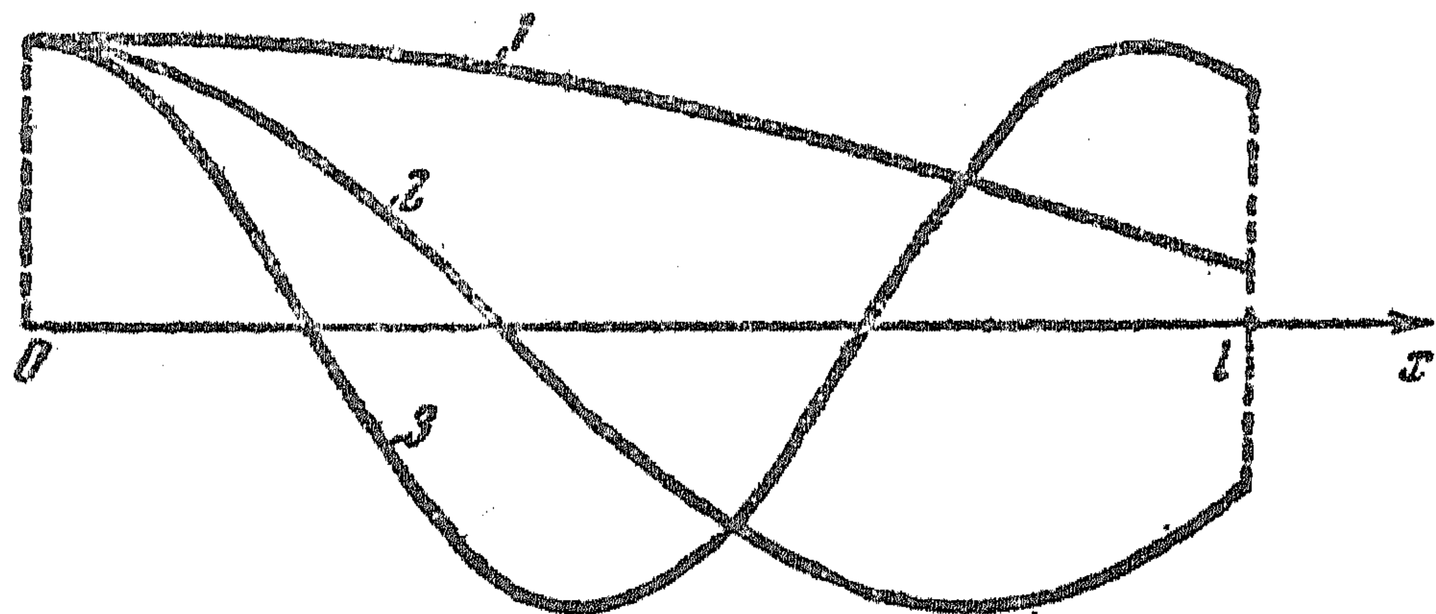


圖 231.

最好用圖 230 来研究一下，当电容 C 由零变到 ∞ 时，振动的波形会怎样变化，我們建議讀者把这当習題做。

§ 90. 固有振动波形的正交性

固有振动的波形代表着这种振动沿系統的振幅分布，和具多个自由度的系統中的正則振动的振幅分布相似。

因此，固有振动的波形所具有的正交性的条件，和具多个自由度系統中的振幅分布的条件(75.6)是一样的。不管什么样的分布系統(即令是不均匀的)，不管它兩端具有什么样的条件，上述这种

条件都成立。然而，不够完善的地方，在于它是由具有齐次边界条件① 的均匀系統导出来的。

令函数 X_k 代表关于頻率 ω_k 的振动波形，函数 X_s 代表关于 ω_s 的波形，那末，方程式(88.12)可以写为：

$$X_k''+\frac{\omega_k^2}{c^2}X_k=0,$$
$$X_s''+\frac{\omega_s^2}{c^2}X_s=0. \tag{90.1}$$

用 X_s 乘第一个等式，用 X_k 乘第二个等式，然后再用第一式减第二式时，便得到：

$$X_k''X_s-X_s''X_k+\frac{1}{c^2}X_kX_s(\omega_k^2-\omega_s^2)=0. \tag{90.2}$$

沿綫由 0 到 l 来逐項积分，

$$\int_0^l (X_k''X_s-X_s''X_k)dx=\frac{\omega_s^2-\omega_k^2}{c^2}\int_0^l X_kX_sdx.$$

要注意，
$$X_k''X_s-X_s''X_k=\frac{d}{dx}(X_k'X_s-X_s'X_k),$$

因此，前一个积分等于：

$$X_k'(l)X_s(l)-X_s'(l)X_k(l)-X_k'(0)X_s(0)+X_s'(0)X_k(0). \tag{90.3}$$

如果在兩端 X 或者 X' 等于 0，那末(90.3)也等于零，因此，

$$(\omega_s^2-\omega_k^2)\int_0^l X_kX_sdx=0. \tag{90.4}$$

因为 $\omega_s\neq\omega_k$，那末，对于任何兩个不同波形的固有振动而言，

$$\int_0^l X_kX_sdx=0, \tag{90.5}$$

当 $k\neq s$ 时，上式是固有波形正交性的条件。

① 在兩端，$y=0$ 或者 $\frac{\partial y}{\partial x}=0$ 时，称为齐次的边界条件。

应該注意，对于具有非齐次边界条件的系統而言，正交性的条件(90.5)將具有某些不同的形式。

§91. 具阻尼系統的固有振动

当杆作固有縱振动(或者当管中的气体作振动)时，如果使振动發生衰减的摩擦力，与杆的無穷小單元的位移速度成正比，那末，分析固有振动便不会有多大的困难。在电振动的情况下，假如沿导綫的电場分量，可以大致認为比垂直于导綫的电場分量小很多时，也是这样。这时会有"电报方程式"(87.8)：

$$\frac{1}{C_0}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}=L_0\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}+R_0\frac{\partial Q}{\partial t}. \tag{91.1}$$

現在来研究当导綫兩端断开时的固有振动，这种振动滿足下列条件：

$$Q(0,t)=0,\quad Q(l,t)=0. \tag{91.2}$$

我們記得，对于杆而言，这些条件对应于杆的兩端被牢牢地固定着，在裝有气体的管中，这些条件对应它的兩端是封閉的。

現在来求关于(91.1)的駐波型式的解，即：

$$Q(x,t)=X(x)T(t). \tag{91.3}$$

和以前一样，这里 X 仅仅是 x 的函数，而 T 仅仅是时間 t 的函数。將(91.3)代入(91.1)并作变换，便得到：

$$c^2\frac{\dfrac{d^2X}{dx^2}}{X}=\frac{\dfrac{d^2T}{dt^2}+\dfrac{R_0}{L_0}\dfrac{dT}{dt}}{T}, \tag{91.4}$$

其中 $c=1/\sqrt{L_0C_0}$ 是波的傳播速度。等式(91.3)的每一边都应該等于一个常数，例如等于 $-\omega^2$。因此，方程式(91.4)相当于下列兩个方程式：

$$\frac{d^2T}{dt^2}+\frac{R_0}{L_0}\frac{dT}{dt}+\omega^2T=0,$$

$$\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{\omega^2}{c^2}X=0.$$

这兩个方程式的解可以写为:

$$X=A\cos\frac{\omega}{c}x+B\sin\frac{\omega}{c}x,$$
$$T=De^{-\delta t}\cos(\omega_1 t+\varphi), \tag{91.5}$$

这里用了符号:

$$\delta=\frac{R_0}{2L_0}\text{和}\ \omega_1^2=\omega^2-\delta^2.$$

現在仅仅把下列边界条件加于函数 $X(x)$:

$$X(0)=0,\ \ X(l)=0.$$

当

$$A=0\ \text{和}\ \sin\frac{\omega l}{c}=0 \tag{91.6}$$

时,这些条件能满足。

由方程式(91.6)的后面一个等式可求出所有的 ω 的値,这些値等于当 $R_0=0$ 时系統的固有频率,

$$\omega_s=\frac{\pi sc}{l}, \tag{91.7}$$

其中 $s=1, 2, 3, 4\cdots$。

將(91.7)代入(91.5)和(91.3),便求出了关于一个固有振动的表达式:

$$D_s e^{-\delta t}\sin\frac{\pi sx}{l}\cos\left(\sqrt{\omega_s^2-\delta^2}\,t+\varphi_s\right), \tag{91.8}$$

一般形式的固有振动是 s 等于所有値 ($s=1, 2, 3\cdots$) 时的振动(91.8)的和,

$$Q(x, t)=e^{-\delta t}\sum_{s=1}^{n}D_s\sin\frac{\pi sx}{l}\cos\left(\sqrt{\omega_s^2-\delta^2}\,t+\varphi_s\right), \tag{91.9}$$

和前面的(88.26)一样,上式中的 D_s 和 φ_s 是由起始条件来确定

的，而 ω_s 則由公式(91.7)来确定。

由表达式(91.9)可以看出，系統中每一个固有振动的波形都与阻尼無关。所有頻率的振动都随时間作同样的衰减，但阻尼的减縮則各不相同，它随着頻率的增加而下降，假如对于一次諧波而言，过程是振动的 $[(\pi c/_l)>\delta]$，那末，对于所有固有頻率的过程而言也是一样。

§92. 具分布常数的均匀系統中的受迫振动

在一般情形下，外来作用(外力)会沿着系統分布，不过通常在实际問題中所遇到的是一种比較簡單的情形；外力集中在系統的某一处(或者某些处)，常常是集中在系統的一端。因此，設有一根有限長的杆，其一端受外力作用(圖 232)，現在来研究这杆在無摩擦情况下的受迫縱振动。

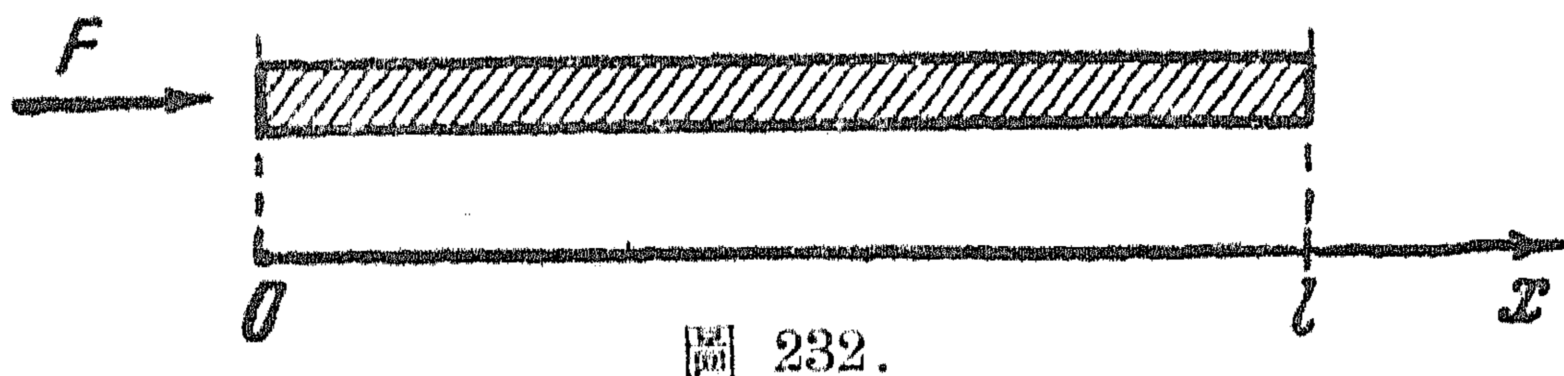


圖 232.

杆的另一端是自由的，因此，边界条件必須写为：

$$-ES\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0}=F(t),\quad \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=l}=0, \tag{92.1}$$

上式中，y 是在靜止狀态下坐标为 x 的截面的位移。

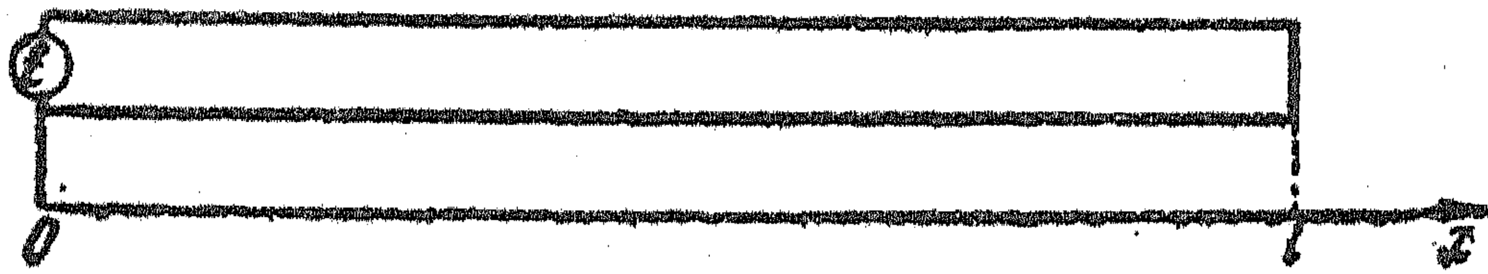


圖 233.

这样提出的关于杆(或者管中气体)的振动問題，完全与某种系統中的电振动問題等效，这种系統即是由兩根平行的导綫組成的，并在一端連有电动势 $\mathscr{E}(t)$，在另一端短路(圖 233)。

將关于杆中縱振动的方程式(87.2)和关于电綫中电荷振动的方程式(87.8)加以比較，便可推出：

$$\left.\begin{array}{l}\text{可以用 } Q \text{ 来代替 } y,\\ \text{可以用 } \mathscr{E}(t) \text{ 来代替 } F(t),\\ \text{可以用 } \frac{1}{C_0} \text{ 来代替 } ES,\\ \text{可以用 } L_0 \text{ 来代替 } \rho S.\end{array}\right\} \qquad (92.2)$$

因此，將关于杆的振动問題的解按照(92.2)代换以后，便得出关于导綫中电振动問題的解答。

現在研究在正弦外力作用下杆的縱受迫振动，也就是假定：

$$F(t)=F_0e^{ipt}.$$

仿照前面的方法，假定所發生的受迫振动具有頻率 p，或者

$$y_B(x,t)=X(x)e^{ipt}. \qquad (92.3)$$

將(92.3)代入縱振动的基本方程式(87.2)，就得到关于确定振动波形的方程式

$$c^2\frac{d^2X}{dx^2}+p^2X=0,$$

上式具有下列通解：

$$X(x)=A\cos\frac{p}{c}x+B\sin\frac{p}{c}x, \qquad (92.4)$$

其中 A 和 B 是常数，显然，X 应該滿足条件(92.1)。將(92.4)代入(92.3)，然后代入(92.1)的第一个条件，便得到：

$$-ES\frac{p}{c}Be^{ipt}=F(t)=F_0e^{ipt};$$

因此，

$$B=-\frac{cF_0}{pES}. \qquad (92.5)$$

將(87.12)的波的分布速度的値 $c=\sqrt{E/\rho}$ 代入(92.5)，便得到

$$B=-\frac{F_0}{pS\sqrt{E\rho}}.$$

然后將(92.5)代入(92.4)，并这样选擇 A，使得(92.1)的第二个条

件能滿足，这样便得出方程式：

$$-\frac{p}{c}\left[A\sin\frac{pl}{c}-\frac{F_0}{pS\sqrt{E\rho}}\cos\frac{pl}{c}\right]=0;$$

因此，

$$A=-\frac{F_0}{pS\sqrt{E\rho}}\operatorname{ctg}\frac{pl}{c}. \tag{92.6}$$

將 A 和 B 的値代入(92.4)，便得到受迫振动的波形：

$$X(x)=-\frac{F_0}{pS\sqrt{E\rho}}\left(\operatorname{ctg}\frac{pl}{c}\cos\frac{px}{c}+\sin\frac{px}{c}\right). \tag{92.7}$$

用 e^{ipt} 乘上式，便得到 $y_B(x,t)$，这就是杆的每一截面的受迫振动。

可以引入杆在截面 $x=0$ 的动剛度，根据动剛度的定义，它是力的复数振幅和着力点位移的复数振幅的比値。因此，根据定义：

$$\overline{K}=\frac{\overline{F}_0}{\overline{X}(0)}, \tag{92.8}$$

將(92.7)的 $\overline{X}(0)$ 代入上式，便得：

$$\overline{K}=-\frac{S\sqrt{E\rho}\cdot p}{\operatorname{ctg}\frac{pl}{c}}. \tag{92.9}$$

$S\sqrt{E\rho}$—量具有摩擦系数的因次 $\left[\frac{\text{千克}\times\text{秒}}{\text{厘米}}\right]$，并可称为“波摩擦系数”。这个量仅仅与截面的大小和杆的材料有关，而与頻率 p 無关。动剛度 $\overline{K}$ 与頻率有关，它是 $p\operatorname{tg}pl/c$ 的函数。显然，在某些頻率时，$\overline{K}(p)$將等于零，根据(92.8)，这就表示 $X(0)\to\infty$，振动的振幅为無穷大，在外力的作用下，杆中發生了共振振动，因此，和前面一样，共振振动的条件是：

$$K(p_a)=0.$$

同样也会有这种頻率 p_a，当頻率等于这种値时，

$$K(p_a)\to\infty.$$

在这种情形下，$X(0)\to0$，对頻率 p_a 而言，杆代表一个具有無穷大剛度的支柱，这种情况常常被用来抑制振动。

当研究 $\bar{K}$ 和頻率的依存关系时，我們仅仅直接知道受力作用的截面的振动。在实际中，这常常也是重要的。可是，要理解全部的振动过程，就必須先弄清(92.7)的振动波形如何随着頻率的变化而变化。

为了使所举的例子多样化起見，現在就以本节开头講到的电綫中的电振动为例，来研究其受迫振动的波形。

設电綫由一端短路的兩平行导綫組成（圖 233），首先写出电綫的輸入复数阻抗的値，我們記得，动剛度类似于不大常用的复数电容的倒数，在电工学中常常利用复数阻抗，复数阻抗与复数摩擦系数类似，而摩擦系数(14.13)等于：

$$\frac{\bar{K}}{ip}=-\frac{S\sqrt{E\rho}}{i\operatorname{ctg}\frac{pl}{c}}. \tag{92.10}$$

按照(92.2)的对比，將(92.2)中的力学量用电学量来代換，这样代換后的(92.10)便等于电綫的复数輸入阻抗 $\bar{Z}$:

$$\bar{Z}=-\frac{\sqrt{L_0}}{i\sqrt{C_0}\operatorname{ctg}\frac{pl}{c}}=i\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\operatorname{tg}\frac{pl}{c}, \tag{92.11}$$

$\sqrt{L_0/C_0}$ 一量称为电綫的波阻抗，它与頻率無关。輸入阻抗按照正切規律依存于頻率，因此，有一些頻率的値会使得阻抗为零（共振），也有一些頻率的値会使得阻抗为無穷大（阻抗共振）。在后一种情形中，电綫是一个理想的絕緣体，在工程技术上，例如在悬置高頻饋电綫时，常常利用这种情况。

圖 233 所示的电綫由兩根导綫組成，現在来研究这电綫中的受迫振动，电荷 Q 的受迫振动的波形，和杆的縱振动情形中 y 的波形完全相同。假如按照(92.2)將(92.7)中的力学量換成电学量，那末，便得到：

$$X(x)=\frac{\mathscr{E}_0}{p\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}}\left(\operatorname{ctg}\frac{pl}{c}\cos\frac{px}{c}+\sin\frac{px}{c}\right)=$$

$$=\frac{\mathscr{E}_0\cos\frac{p}{c}(l-x)}{p\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\sin\frac{pl}{c}},\qquad(92.12)$$

因此，

$$Q(x,t)=-\frac{\mathscr{E}_0\cos\frac{p}{c}(l-x)}{p\sqrt{\frac{L_0}{c_0}}\sin\frac{pl}{c}}e^{ipt}\qquad(92.13)$$

为了便于分析起見，我們不研究电荷 Q 的振动，而去研究电位 $V(x,t)$ 的振动。电荷和电位彼此間的关系，由公式(87.4)表出，所以，將(87.4)代入表达式(92.13)，便得到：

$$V(x,t)=\mathscr{E}_0\frac{\sin\frac{p}{c}(l-x)}{\sin\frac{pl}{c}}e^{ipt}.\qquad(92.14)$$

当 $x=0$ 时，$V=\mathscr{E}_0$，而当 $x=l$ 时，$V=0$，因此，所求得的解是满足边界条件的。

現在来詳細研究一下受迫振动的波形和頻率 p 的依存关系。我們不用頻率 p，而用与它对应的波長，根据定义：

$$\lambda=c\frac{2\pi}{p}.$$

因此，电压振动的波形可以写为：

$$\mathscr{E}_0\frac{\sin\frac{p}{c}(l-x)}{\sin\frac{pl}{c}}=\mathscr{E}_0\frac{\sin 2\pi\frac{l-x}{\lambda}}{\sin 2\pi\frac{l}{\lambda}}.\qquad(92.15)$$

在圖 234 上，表明一个关于任何 λ 值的振动波形的簡單作圖法。

由$x=l$的一点沿横坐标向后取一段長等于λ，然后通过点$(0, \mathscr{E}_0)$，作一个和波長λ相对应的正弦波，在$0—l$这一段的正弦波部分提供了电压振动振幅的分布。如果$\lambda<l$，作圖法也是这样进行。

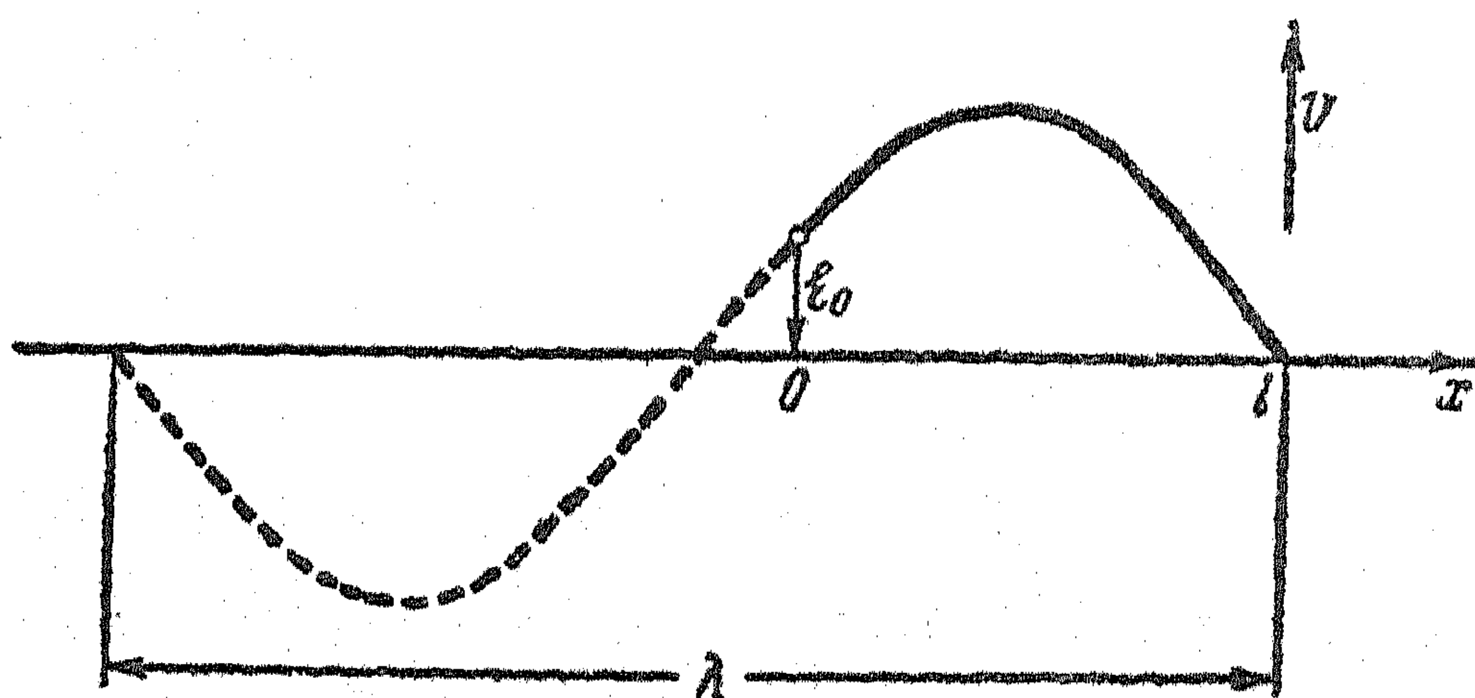


圖 234.

現在来看看当频率p由零增加时，或者λ由∞減小时，振动的波形怎样变化。在圖235上，表出了对应于$0<p<\frac{\pi c}{l}$这一范圍頻率的一些不同的波形。当振动頻率接近于$\pi c/l$，即接近于兩端短路系統的第一个固有頻率时，腹的电压振动振幅开始急剧增加；当頻率低于$\pi c/l$时，一切点的振动都同相位。

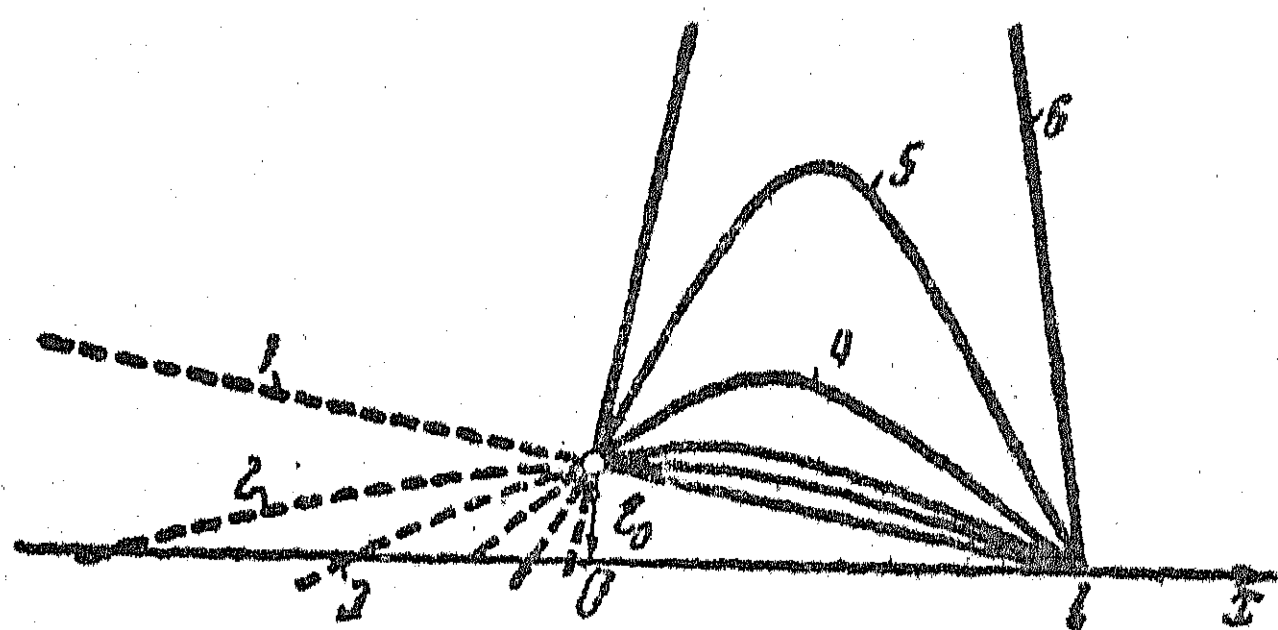


圖 235.

在圖236中，表明頻率在$(\pi c/l)<p<(2\pi c/l)$这一范圍內的受迫振动的波形。

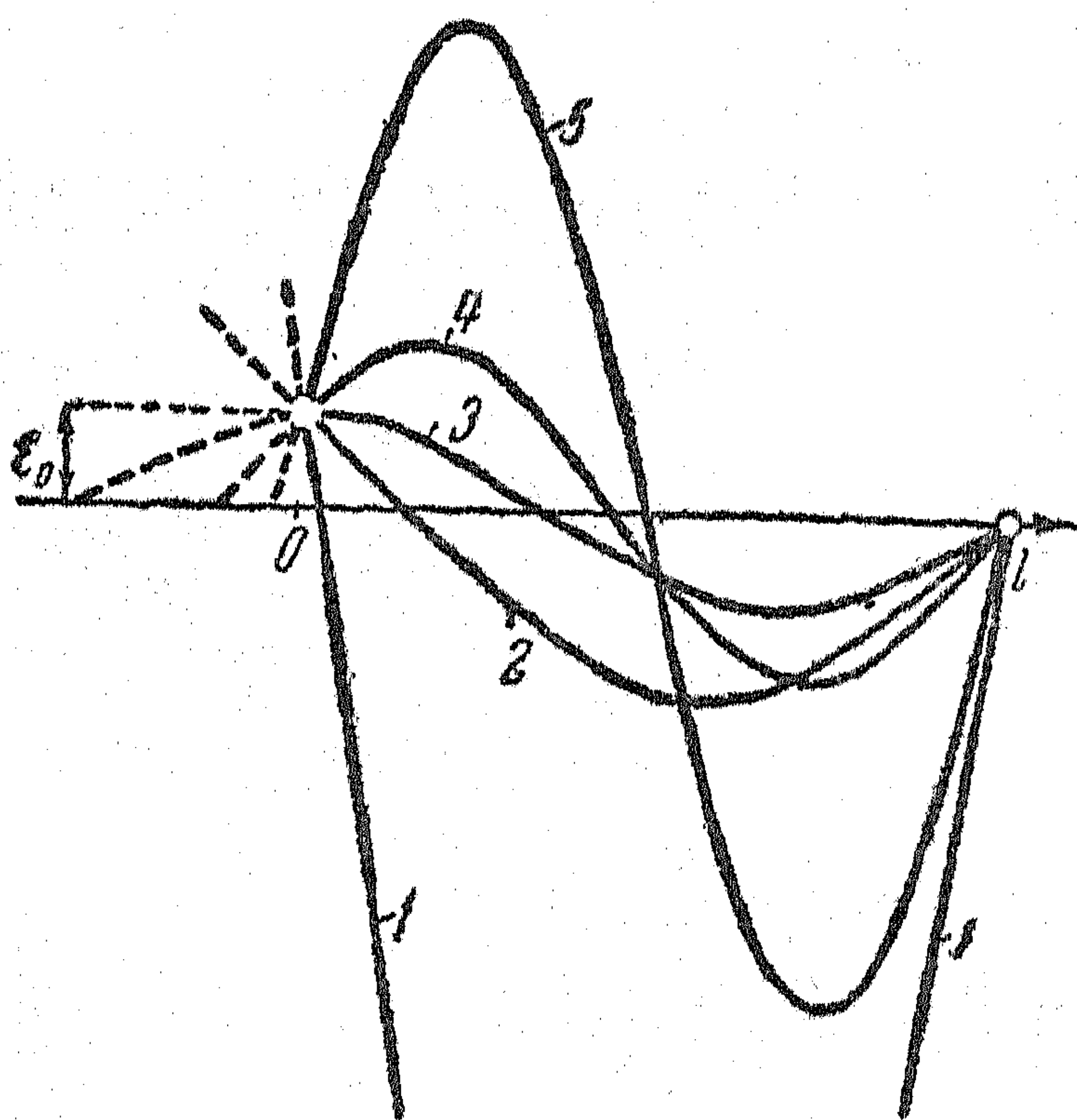


圖 236.

把公式(92.15)以及圖235和圖236加以分析，就可以看出，当外电动势的頻率和兩端短路的导綫系統的固有頻率相等时，也就是当电綫上有整数个半波时，会出現共振振动；与此相反，

当外电动势作用于电綫的一端，另一端断开，則当外电动势的頻率和电綫的固有頻率相等时，振动会有最小的振幅（这种情形下，电压振动的振幅不会大于 $\mathscr{E}_0$）。

还可以这样來說明：假如外电动势的頻率等于系統的固有頻率，那末，外电动势是加在电流振动的节上，这时沒有共振。

在受迫振动的情况下，当电綫的長度等于奇数个四分之一的波長时，在接有电动势的一端，总是电流的节。

这种分析的全部結果，可以直接应用到机械系統上，例如，应用到圖 232 所示的杆的振动上。当正弦的外力加于杆的自由的一端时，在这种情况下：当外力頻率和兩端自由的杆的固有頻率相等时，也就是說，在固有振动的情况下，当位移振动的腹發生在着力点时，就会發生共振振动。

假如杆受外力作用的一端牢牢地固定着，当外力頻率等于这一杆的固有頻率时，并不会發生共振。在杆中激励了固有振动，它具有足够大的振幅，以保証受力作用的截面不运动。对于这些頻率而言，杆具有無穷大的剛度。

当杆一端的位移是給定时，則完全又是一个情形。这时，和“电流共振”（§ 17）时完全一样，在这种情形下：当外来作用的頻率和一端被固定的杆的固有頻率相等时，会發生共振；与此相反，在自由杆的固有頻率时，不会發生共振。換句話說，假如位移的振动是給定在位移振动的腹上，那末，当頻率（外来作用的頻率和固有頻率）重合时，不会發生共振。假如位移是給定在位移的节上，那末，当頻率重合时，会發生共振。

前面所講的，完全可以适用于討論兩根导綫中的电磁振动，假定这振动不是由导綫一端的电动势所引起的，而是由給定的电流所引起的，或者說是在有这样一种設备的情况下所引起的，这种設备能保証电綫的一端有具一定振幅和頻率的电流振动。

我們詳細分析过当外来作用加在系統的一端时的受迫振动。当外来作用是加在系統的兩端之間的某一点(某一截面)时，还是用这个方法来分析。只是受迫振动除了应該滿足兩端的条件以外，还应該滿足一些在外力着力点的补充条件。

参考文献

1. А. А. Андронов и С. Э. Хайкин, Теория колебаний, ГТТИ, 1936.
2. Б. П. Асеев, Основы радиотехники, Связьиздат, 1947.
3. А. Н. Крылов, О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах, Академкнига, 1949.
4. А. Н. Крылов, Вибрации судов, ОНТИ, 1936.
5. К. Ф. Теодорчик, Автоколебательные системы, Гостехиздат, 1948.
6. Н. М. Крылови Н. Н. Боголюбов, Новые методы нелинейной механики, ГТТИ, 1934.
7. Б. В. Булгаков, Колебания, т. I, Гостехиздат, 1949.
8. С. П. Тимошенко, Теория колебаний в инженерном деле, ГНТИ, 1932.
9. Релей, Теория звука, т. I и II, ГТТИ, 1940.
10. Ден-Гартог, Теория колебаний, ГТТИ, 1942.

統一書号 13010·416

定价 ¥0.55